BINDING SECT. OCT 2 3 1969

QA Todhunter, Isaac
821 'Ilm-i sukun
T639
1879

P&A Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

ترجمہ اصول علم جر ثقیل ٹاڈ ہنٹر صاحب

فہرست مضامین

۱- دیباچہ
۲- متوازی الاضلاع طاقتون کا
۳- ایک ہی سطح مین ایک ہی نقطہ پر عمل کرنیوالی طاقتین
۴- دو متوازی طاقتون کا حاصل
۵- مقیاس القوت
۶- ایک ہی سطح مین عمل کرنیوالی طاقتین
۷- جسم محدود الحرکت
۸- متوازی طاقتون کا مرکز
۹- مرکز ثقل
۱۰- خواص مرکز ثقل
۱۱- مجرار
۱۲- ترازو
۱۳- چرخ اور محور- دندانہ دار چرخ
۱۴- گھرنی
۱۵- سطح مائل
۱۶- فانہ اور پیچ

بسم اللہ الرحمن الرحیم

۱- اس کتاب کے شروع مین چند تعریفات کا لکھنا ضرور ہی ؛ اِس بات کو ہم فرض کر لیتے ہین کہ طالب العلم مادہ کے خواص سے واقف ہو گا کیونکہ ہر ایک چیز کے مس کرنے سی مادہ کا خیال ہمارے دل مین پیدا ہوتا ہی ؛

۲- جسم ایک مادہ کا حصہ ہی جو کہ ہر جانب سے محدود ہوتا ہی اور مجسم ذرہ ایک جسم ہے جو ہر جانب سے نہایت چھوٹا ہوتا ہی ہم اُسکو ذرہ سی تعبیر کرینگے

۳- طاقت وہ ہی جو ایک جسم مین حرکت پیدا کرتی ہی یا حرکت پیدا کرنیکی قابلیت رکھتی ہی یا جو ایک جسم کی حرکت بدلدیتی ہی یا بدلنے کی قابلیت رکھتی ہی ؛

۴- جبکہ چند طاقتین ایک جسم پر ایک ہی وقت خلاف سمتون مین عمل کرتی ہین تو بعض اوقات ایسا واقع ہوتا ہی کہ اِنکا اثر ایکدوسری کی کشمکش سی زائل ہو جاتا ہی اور جسم ساکن رہتا ہی جبکہ جسم باوجود عمل کرنے طاقتون کے حرکت نہ کرے تو کہتی ہین کہ وہ ساکن ہی ؛

۵- جرثقیل مین مادیات کی سکون اور حرکت کے قوانین سے بحث ہوتی ہے علم سکون مین جسم کے ساکن رہنے کا بیان ہوتا ہے اور علم حرکت مین جسم کی حرکت کا بیان ہوتا ہے ٭

۶- جرثقیل ہم کسی قدر بلا مدد ریاضی کے بھی سیکھ سکتے ہین مگر اس علم کی کچھ پایئداری نہ ہوگی اسلیئے اِس علم کو وسعت اور استحکام دینے کے لئے علم ہندسہ اور اقلیدس اور علم مثلث یعنی شاخہاے ریاضی بسیط کی مدد کی ضرورت پڑتی ہے - جبکہ ہم جرثقیل انکی امداد سے حاصل کرین تو اسکو جرثقیل بیانیہ کہتے ہین اور یہ جرثقیل ریاضی مرکب کا ایک حصہ ہی ٭

۷- اِس کتاب مین ہم جرثقیل بیانیہ کی اصول لکھتے ہین ہم یقین کرتے ہین کہ طالب العلم اقلیدس جبر مقابلہ وعلم مثلث سے واقف ہوگا ٭

۸- ہر ایک طاقت مین جو ایک ذرہ پر عمل کرتی ہو تین باتون کا لحاظ کرنا ضروری ہے اول مقام انفعال طاقت یعنی طاقت کے اثر کرنیکا مقام - دویم سمت طاقت یعنی وہ سمت جسمین طاقت ذرہ کو حرکت دینے کی قابلیت رکھتی ہی - تیسرا مقدار طاقت

۹- مقام طاقت کو ہم اوسطرح سے معلوم کرتے ہین جسطرح اقلیدس مین نقطہ کو معلوم کرتے ہین

اور سمت طاقت اُسی طرح معلوم ہوتی ہی جیسے اقلیدس مین خط کی سمت معلوم ہوتی ہے اور طاقت کے مقدار معلوم کرنے

کا طریقہ ہم آگے بیان کرینگے ؛

۱۰ - طاقت کی مقدار کسی خاص طاقتکو بطور اکائی کے فرض کرنے سے اور اُسکے ساتھ اور طاقتونکی نسبت اعداد سے تعبیر کرنے سے معلوم ہوسکتی ہے ؛

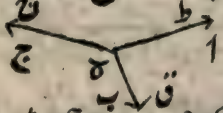
جبکہ دو طاقتین ایک ہی جسم پر مخالف سمتون مین اثر کرنے سے اُس کو حرکت نہ دین سکین تو وہ باہم مساوی ہونگے - اگر ہم دو مساوی طاقتون کو جسم کی ایک ہی جانب مین لگاوین تو اُنکا حاصل ہر ایک سے دو چند ہوگا علی ہذا القیاس اگر تین مساوی طاقتین ہونگی تو اُن کا حاصل سہ چند ہوگا ؛

۱۱ - پس ہم طاقتکو ایک خط مستقیم سے تعبیر کر سکتے ہین - یعنی ہم مقام طاقت سے سمت طاقت مین ایک خط کھینچ سکتے ہین اور اُس کا طول طاقت کی مقدار کے تناسب بنا سکتے ہین - مثلاً فرض کرو کہ ایک ذرہ پر تین طاقتین ط - ق - ح عمل کرتے ہین ہم اُن کو خطوط مستقیم سے تعبیر کر سکتے ہین ؛

فرض کرو کہ مقام ذرہ ہ ہی یہان سے خطوط ہ ا اور ہ ب اور ہ ج طاقتہائے ط - ق ح - کی سمتون مین علی الترتیب کھینچین اور اُن کا طول طاقتون کی تناسب بناوین یعنی فرض کرو کہ $\frac{ہب}{ہا} = \frac{ق}{ط}$ اور $\frac{ہج}{ہب} = \frac{ح}{ق}$ جب ہم کہتے ہین کہ خط ہ ا - طاقت ط کو تعبیر کرتا ہے تو ہماری یہ مراد ہے کہ یہ طاقت نقطہ ہ سے ا کی جانب حرکت کی

قابلیت رکھتی ہی اگر طاقت مذکور آ سے ہ کی جانب عمل کرتے تو ہم اُسے بجای ہ آ کے آ ہ سے تعبیر کرتے ۔ طالب العلم کو اس بات کا لحاظ رکھنا ضرور چاہیے مناسب ہوگا کہ ہم اس موقع پر سمت طاقت اور خط تحریک طاقت مین فرق بیان کرین مثلاً جب ہم کہین کہ آ ہ خط تحریک طاقت ہی تو اُس سے ہماری صرف یہ مراد ہے کہ طاقت ط ان دونون نقاط کے درمیان عمل کرتی ہی خواہ ہ سے آ کی جانب خواہ آ سے ہ کی جانب ۔ لیکن جب ہم کہین کہ ہ آ سمت طاقت ط ہے اس سے ہماری صرف یہ ہی مراد ہو سکتی ہی کہ طاقت مذکورہ ہ سے آ کی جانب اثر کرتی ہی نہ آ سے ہ کی جانب

۱۲ ۔ بعضے وقت تیر کے پہل کا نشان طاقت کی سمت ظاہر کرنیکو بنا دیتے ہین اور بعضے وقت حروف مثلاً ط ۔ ق ح جو کہ طاقتون کے مقدار ظاہر کرتے ہین شکل مین لکھ دیتے ہین ۔



تجربہ سے ہمین معلوم ہوتا ہے کہ اگر ایک جسم ہوا مین چھوڑ دیا جاوے تو وہ نیچے کی طرف ایک خاص سمت مین گر پڑیگا اگر وہ پھر اُسی مقام سے چلے تو وہ پھر اُسی جگہہ پہ آپڑیگا ۔ اِس سمت کو سمت راس کہتے ہین اور جو سطح اُس سے زاویہ قائمہ بناتے ہی اُسکو سطح اُفقی یا مستوی کہتے ہین ۔ جسم کے گرنیکا باعث کشش زمین یا جذب ثقلی ہے ۔ اگر اس جسم کو ہاتھ یا میز پہ ٹھرایا جاوے تو وہ جسم ہاتھ یا میز پہ کچھ دباؤ کریگا

وزن جسم اُس دباؤ کا نام ہے جو زمین کی کشش کے سبب سے ایک جسم دوسرے

جسم پر جس سے وہ مس کر کے پیدا کرتا ہے ؛

علم سکون مین طاقتون کا اُن اوزان سے اندازہ ہوسکتا ہی جنکو وہ سہار سکین - مثلاً ایک طاقت جو ایک پونڈ بوجھ اُٹھا سکتی ہے ایک کہلاوے تو جو طاقت پانچ پونڈ بوجھ اُٹھائیگی وہ پانچ سے تعبیر ہوگی ؛ طاقت کئی طرح سے جسم پر عمل کرتی ہے مگر ہم صرف تین قسمون کا ذکر کرینگے - اول طاقت دافعہ جب ہم ایک جسم کو دوسری جسم سے دھکیلین دوسری طاقت جاذبہ یعنی جب ایک جسم کو رسی یا لکڑی کے ذریعہ سے اپنی طرف کھینچ لین - تیسری جاذب ثقلی جسکے باعث ہر ایک جسم زمین کی طرف خود بخود میل کرتا ہی ؛

جسم مجسم ذرون کا مجموعہ قیاس کیا جا سکتا ہے یعنی چھوٹے چھوٹے اجزاء سے بنا ہوا ہوتا ہے - جو کہ کشش اتصال سے باہم ملے ہوئے ہوتی ہین - جس جسم مین ذرے ایکدوسری سے متغیر نہین ہوتے اُس کو جسم مصمت کہتے ہین در حقیقت کوئی جسم مصمت نہین ہی مگر ہم اِس ابتدائی کتاب مین یہ فرض کر لیتے ہین کہ جسم کا مصمت ہونا ممکن ہے ؛

(۱۷) اب ہم علم سکون مین ایک مفید اصول لکھتے ہین جسکو بالفعل طالب العلم بطور علم متعارفہ کے مان لے - اگر ایک طاقت ایک جسم پر اثر کرے تو اگر ہم اُسی سمت مین اُس طاقت کو دوسرے نقطہ پر لگا وین تو طاقت کے عمل مین تغیر نہ ہوگا بشرطیکہ یہ نقطہ اُسی جسم مصمت مین واقع ہو - فرض کرو کہ ایک جسم چند طاقتون کے اثر سے ساکن ہے اور اُن مین

سے ایک طاقت ط نقطہ آ پر لگی ہوئی ہے۔

فرض کرو کہ ب سمت طاقت ط مین ایک دوسرا نقطہ ہی

تو اس اصول کی یہ منشاء ہوئی کہ اگر ط کو بجائی نقطہ آ کے نقطہ ب پر لگا دیا جاوے تو کچھ فرق واقع نہین ہوگا۔ اس اصول کا نام اصول تبدیل مقام طاقت بہ سمت خط تحریک ہی اس کا ثبوت کچھ تجربہ سے بھی ہوسکتا ہی مگر ہم اس کا ثبوت دلیل خلف سے دینگے یعنی اسکو صحیح مانکر علم سکون کو اسی پر مبنی رکھینگے اور جو نتائج حاصل ہونگے اون کو مشاہدہ اور تجربہ کے نتائج سے مقابلہ کرینگے اور اُن مین اس قدر مطابقت پائی جاویگی کہ ہم اس اصول کو درست اور صحیح مان لین گے مگر بالفعل ابتدا مین اسکو بطور علم متعارفہ کے صحیح مان لینا چاہیے۔ بیان مفصل ذیل سے اس اصول کے صحت کا حال ظاہر ہوگا

فرض کرو کہ دو طاقتین ق اور ح نقطہ (ب) پر عمل کرتے ہین ان مین سے ہر ایک طاقت ط کے برابر ہے طاقت ق ط کی سمت مین اور ح سمت مخالف مین عمل کرتی ہی یہ بات ظاہر ہے کہ اس سے طاقت ط کے عمل مین کچھ تغیر واقع نہین ہوا۔ اب طاقت ط نقطہ ا پر اور ح نقطہ ب پر سمت مخالف مین عمل کرتے ہین اور مساوی ہین فرض کرلو کہ یہہ ایک دوسری کو زائل کرتے ہین یعنی اُن کا اثر باقی نہین رہتا اگر اُن کو دور کردین تو جسم کی حالت مین کچھ فرق نہ ہوگا۔ صرف طاقت

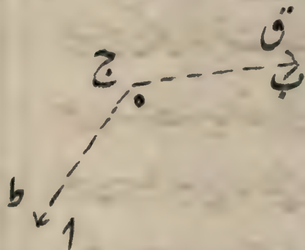
(ق) نقطہ ب پر باقی رہیگے اور یہ ط کے مساوی ہے مگر بجاوی نقطہ
آ کے نقطہ ب پر عمل کرتے ہے

جب ہمین کسی طاقت کے مقام عمل کا انتقال کرنا ہوگا تو ہم ہر دفعہ یہ
نہین کہینگے کہ نیا مقام جسپر اُس طاقتکو انتقال کیا ہے جسم مصمت سے علیحدہ
نہین ہے لیکن ہماری مراد بھی ہوگی کہ اُسی جسم مصمت مین واقع ہے -
اسکے بعد ہمین اس اصول کے عکس کے بھی ماننے کی ضرورت ہوگی
یعنے جب ایک طاقت ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ پر بغیر عمل مین فرق
آنیکے لگائی جائے تو دوسرا نقطہ اُس طاقت کے خط تحریک مین
ہوگا ؛

چونکہ ڈورہ طاقت کے عمل کرنیکا ایک ذریعہ ہے اور بارہا اس کا حوالہ دینا
پڑیگا اسلئے ہم اسکی بابت بھی کچھ ذکر کرتے ہین - فرض کرو کہ ڈورہ
آ ب کے ایک سرے پر قوت (ط) اور دوسرے سرے پر قوت ق سمت
مخالف مین اثر کرتی ہین یہ ق ب . . . ج . . . . . آ ط
صاف ظاہر ہے کہ اگر ڈورہ
حرکت نہ کریگا تو قوتین برابر ہون گی ؛

فرض کرو کہ قوت ق بجاے نقطہ ب کے کسی درمیانی نقطہ ج پر لگادی
جاوے تو بھی ڈورے کو ساکن رکھنے کو ق ط کے برابر ضرور ہونی چاہئے
اس کو بعض دفعہ اس طور پر لکھتے ہین کہ جو طاقت سیدھے ڈورے کے
ذریعہ سے لگائی جاتی ہے اُسی مین کچھ تغیر نہین ہوتا - آ ب فرض

کرو کہ ایک ڈورہ اج ب ایک کیل ج کے اوپر تنا ہوا ہے یہان بھی یہ بات ظاہر ہے کہ اگر ڈورہ ساکن ہے تو طاقتین ط اور ق مساوی ہونی چاہئیین اِسکو بعض اوقات اِس طور پر بھی کہتے ہین کہ جو طاقت بذریعہ ایک ڈورہ کے جو کہ کسی کیل پر تنا ہوا ہے لگائی جاوے تو اس مین کچھ تغیر نہین ہوگا۔ اِن دونون نتایج کو مختصراً اِس طور پر لکھتے ہین کہ ڈوریکی کشش ہر مقام پر یکسان رہتی ہے اس مین ڈوریکا وزن شمار مین نہین آتا



۲۲ تجربہ سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک چیز کے کس قدر حجم کا وزن دوسری چیز کے برابر حجم کے وزن کے مساوی نہین ہوتا۔ مثلاً سکہ کے ۵ مکعب انچ مین اِس قدر وزن ہوتا ہے۔ جسقدر لوہے کے ۷ مکعب انچ مین پس ہم کہتے ہین کہ سکہ بہ نسبت لوہے کے زیادہ تر ثقل ہوتا ہے ؛

جبکہ ایک جسم کے ایک ٹکڑے کا وزن اُس ٹکڑے کے حجم کی ساتھ نسبت معین رکھے تو اُس جسم کو جسم معین اور ہموار کہتے ہین ؛

دو اجسام ہموار کے مادہ ثقل مین وہی نسبت ہوتی ہے جو اُن اجسام کے برابر حجمون کی وزنون مین ہوتی ہے۔ مثلاً ہم کسی جسم ہموار کو پیمانہ مان لین اور اِسکے مادہ ثقل کو اکائی سے تعبیر کرین تو اور جسمون کے مادہ ثقل ہندسون سے تعبیر ہو سکتی ہین۔ مثلاً فرض کرو کہ ہمنے پانی کو

پیمانہ بنایا پس چونکہ تانبے کے ایک مکعب انچ کا وزن پانی کے ۹ مکعب انچ کے وزن کے برابر ہوتا ہے اسلئے ہم تانبے کے مادہ ثقل کو ۹ سے تعبیر کر سکتے ہین ٭

مثالات - باب اول

(۱) اگر کوئی طاقت جو ق پونڈ وزن سہار سکے ایک خط مستقیم سے جسکا طول آ فٹ ب انچ ہو تعبیر کیجاوے تو ج فٹ طولانی خط سے کیا طاقت تعبیر ہوگی -

(۲) اگر ۰، ۷ پونڈ کی طاقت ایک خط سے جسکا طول آ انچ ہے تعبیر ہو تو ایک ٹن کی طاقت کسطرح تعبیر کیجاویگی

(۳) اگر ط پونڈ کی طاقت ایک خط مستقیم سے جسکا طول ۹ انچ ہے تعبیر کیجاوے تو ایک خط جسکا طول ب انچ ہے کس طاقت کو تعبیر کریگا -

(۴) اگر ط پونڈ کی طاقت ایک خط مستقیم سے جسکا طول آ انچ ہے تعبیر ہو تو ق پونڈ کی طاقت کس خط سے تعبیر ہوگی -

(۵) ایک رسّی ایک چھت سے لٹکی ہوئی ہے اس رسّی کے انجام پر ایک ۳ پونڈ کا وزن لگا یا ہوا ہے اور اسکے نقطہ وسط مین ۲ پونڈ کا وزن تو اُس رسّی کے دونو مقاموںکی کشش معلوم کرو - اگر اوپر کے حصہ کی کشش ایک خط سے جسکا طول ب انچ ہے تعبیر ہو تو نیچلے حصہ کی کشش کو کتنی طول کا خط تعبیر کریگا ٭

(۶) اگر ۳ پونڈ پیتل کا حجم اوتنا ہی ہو جتنا ۴ پونڈ سکہ کا تو پیتل اور سکہ کے اوزان ثقلونکا مقابلہ کرو

(۷) دو اشیا آ و ب کی اوزان ثقل کا مقابلہ کرو جبکہ ا کی ۴ مکعب انچونکا وزن ب کے ۳ مکعب انچونکے وزن کے برابر ہے۔

(۸) کسی شئے کے ایک مکعب فٹ کا وزن ۴ ہنڈرڈ ویٹ ہے تو معلوم کرو کہ ایک دوسری شئے کا کتنا حجم جسکا وزن ثقل پہلی شئے سے ۵/۳ گونہ ہے وزن مین ۷ ہنڈرڈ ویٹ ہوگا۔

(۹) دو اجسام جنکے حجمونکی نسبت ایسی ہے جیسے ۴:۳ وزنون مین نسبت ۴:۳ رکھتے ہین تو انکے اوزان ثقل کی نسبت معلوم کرو۔

(۱۰) اگر ایک جسم کے ۱ مکعب انچ کا وزن دوسرے جسم کی ب مکعب انچونکے وزن سے ایسی نسبت رکھتا ہو جیسے م : ن تو ان اجسام کی اوزان ثقل کی نسبت معلوم کرو۔

باب دوم قوتونکا متوازی الاضلاع

(۲۳) جب دو طاقتین ایک جسم پر عمل کرین اور اُسکو ساکن نہ رکھہ سکیں تو وہ جسم کسی خاص سمت مین حرکت کرنے لگے گا اب یہ ظاہر ہے کہ ایک ایسی طاقت دریافت ہو سکتی ہے جو جہت وقوع حرکت کے خلاف لگا دی جاے تو وہ دونو طاقتونکے اثر کو زائل کریگی یعنے جسم کو ساکن رکھیگی۔ اگر اصلی طاقتونکو دور کرکے ایک ایسی طاقت جو مقدار مین طاقت مذکورہ بالا

کے مساوی ہو مگر سمت مخالف مین عمل کرنے ہونگا ویجا وسے توبھی
جسم ساکن رہیگا۔

پس ہم تعریف مفصلہ ذیل لکھتے ہین

ایک طاقت جسکا اثر دو یا زیادہ طاقتونکے اثر کے برابر ہوتا ہے تو اسکو
اون طاقتونکا حاصل کہتے ہین اور ان طاقتونکو اُس حاصل کے اجزا
کہتے ہین۔

(۲۴) اب ہم طاقتونکے اتصال کا حال یعنے دو یا زیادہ طاقتونکے
حاصل دریافت کرنیکا طریقہ لکھتے ہین - باب ہذا مین صرف دو ہی طاقتونکا
جو ایک ذرہ پر عمل کرتے ہین حاصل معلوم کرنیکا طریقہ لکھا جائیگا ٭

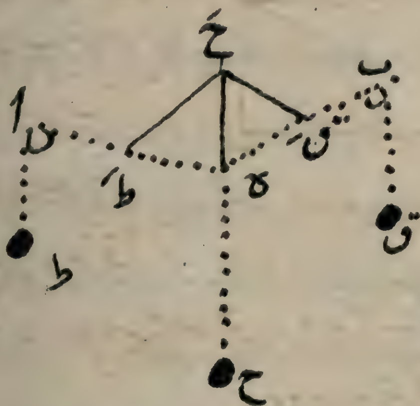
(۲۵) جب دو طاقتین ایک ذرہ پر ایک سمت مین عمل کرتی ہون
تو اونکا حاصل اُنکے مجموعہ کے برابر ہوگا اور اسی سمت مین عمل کریگا۔
یہ بات ظاہر ہے مثلاً اگر ایک طاقت ۵ پونڈ کے اور ایک دوسرے
۳ پونڈ کے ایک ذرہ پر ایک ہی سمت مین عمل کرین تو اُنکا حاصل
۸ پونڈ کے طاقت کے برابر ہوگا اور اوسی سمت مین عمل کریگا۔

(۲۶) جبکہ دو طاقتین ایک ذرہ پر مخالف سمتونمین عمل کرین تو
انکا حاصل اونکے فرق کے برابر ہوگا اور بڑی طاقت کیجانب مین
عمل کریگا مثلاً ایک طاقت ۵ پونڈ کی اور ایک ۳ پونڈ کی ایک ذرہ
پر مخالف سمتون مین عمل کرتی ہین تو اُنکا حاصل ۲ پونڈ کی طاقت
ہوگی اور ۵ پونڈ والی طاقت کی سمت مین عمل کریگی۔

(۲۷) اب ہم ایسی دو طاقتونکا بیان لکھتے ہین جو ایک ذرہ پر ایک خط مستقیم مین عمل نہین کرتین تو اونکا حاصل بذریعہ شکل مفصلہ ذیل دریافت ہو سکتا ہے - اگر دو خطوط مستقیم ایک نقطہ سے کھینچے جاوین اور وہ دو طاقتون کو جو اوسے نقطہ پر عمل کرتے ہوین مقدار اور میل مین تعبیر کرین اور اُن دونو خطوط پر ایک شکل متوازی الاضلاع بنائی جاوے تو اس متوازی الاضلاع کا وتر جو اُس نقطہ مین سے ہوکر گذرتا ہے اُن دونون طاقتون کی حاصل کو مقدار اور سمت مین تعبیر کریگا علم جر ثقیل مین یہ شکل نہایت کارآمد ہے اور اُسکا نام طاقتون کا متوازی الاضلاع ہے ہم اول اس شکل کا تجربہ سے ثبوت دینگے اور پہر اُسکی مختلف نتائج بیان کرینگے اور آخر مین اسکو ثابت کرینگے +

(۲۸) تجربی ثبوت طاقتونکے متوازی الاضلاع کا - فرض کرو کہ آ اور بَ دو افقی کیلین ایک دیوار اس مین لگی ہوئی ہین اور تین ڈورین مقام (ہ) پر گرہ بند ہین ایک ڈورہ ایک کیل ا پر تنا ہوا ہی اور اوسکے سرے پر وزن طَ لٹکا ہوا ہے اور دوسرا ڈورہ کیل بَ پر تنا ہوا ہے اور اُسکے سرے پر وزن قَ آویزان ہے تیسرے ڈورہ سے وزن حَ نیچے کیطرف لٹکتا ہے فرض کرو ان تینونکو اسطرحسے چہوڑ دیا گیا ہے کہ باہمی کشش کے بعد ساکن رہجاوین جیسد ۱۲ کے بموجب کیلونکے باعث سے طَ اور قَ کے وزن مین کچھ فرق نہین واقع ہوتا اب گرہ (ہ) پر تین طاقتین عمل کرتی ہین اور اسے

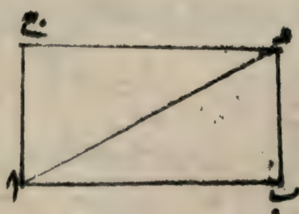
ساکن رکھتے ہین - پس ط اور ق کا اثر جو کہ خطوط ہ آ اور ہ ب مین عمل کرتے ہین طاقت ح سے جو ہ پر راس مین نیچے کیطرف عمل کرتی ہے زایل ہو گیا ہے پس ط اور ق کا حاصل طاقت ح کے برابر ہوگا اور ہ پر سمت راس مین عمل کریگا خط ہ آ سے خط ہ ط ایسا قطع کرو کہ اوسمین اوتنی ہی انچ ہون جتنے کہ ط مین پونڈ ہون اور ہ ب مین سے ہ ق ایسا قطع کرو کہ اوسمین اُتنی ہی انچ ہون جتنے کہ وزن ق مین پونڈ ہین اور ان خطوط پر متوازی الاضلاع ہ ق ح ط



تو آزمایش سے معلوم ہوگا کہ ہ ح مین اوتنی ہی انچ ہونگے جتنے کہ وزن ح مین پونڈ ہین اور خط ہ ح ایک خط راس ہوگا - ہم کیلونکے مقام اور اونکے وزنونکے مقدار مختلف تجارب کیواسطے بدل سکتے ہین اور مختلف نتایج سے طاقتونکے متوازی الاضلاع کی صحت بخوبی ہو جاتی ہے اس عمل کی کامیابی کیواسطے ڈورے بہت باریک اور ملائم ہونے چاہئین اور کیلونکی نسبت گھرنے زیاد مفید ہوگی کیونکہ اُسکے ذریعہ سے ہم اوزان ط اور ق کے سمتین بغیر تبدیل اونکی مقدار ونکے بدل سکتے ہین اب ہم

طاقتونکے حاصل کے ہندسون مین تعداد دریافت کرینگے۔

۲۹) ایک نقطہ پر دو طاقتین عمل کرتے ہین اور اُنکی سمتین نقطہ
ور پر زاویہ قائمہ بناتے ہین تو انکا حاصل دریافت کرو۔
ض کرو کہ خط اب اور اج جداگانہ طاقت ط اور ق کو تعبیر کرتے
ن اور زاویہ ب اج قایمہ ہے ایک شکل ا ب د ج متوازی
ضلاع قائمہ الزاویہ بناؤ تو ا د طاقتون ط اور ق کے حاصل کو تعبیر
یگا ہم اس حاصل کو ح



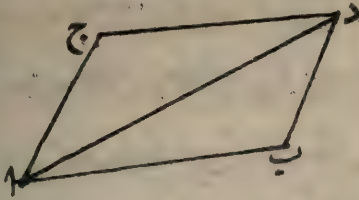
ین گے تو بموجب (ش ۴۷ م ۱)
ے۔(ا د)۲ = (اب)۲ +
ب د)۲ = (اب)۲ +
اج) پس ح ۲ = ط۲ ق۲
رض کرو کہ ط = ۱۵ پونڈ اور ق = ۸ پونڈ کے تو ح۲ = ۱۵۲+۸۲ =

۲۸۹ = ۶۴ + ۲۲۵

∴ ح = ۱۷

ں حاصل طاقت ۱۷ پونڈ کے برابر ہے

۳۰) اب ہم ایسی دو طاقتونکی حاصل کی عام صورت لکھتے ہین جو کہ
یک نقطہ پر عمل کرتے ہین اور اپنی سمتونکے مابین جاہے جتنا زاویہ
ہیر نے ہین ۔ فرض کرو کہ اب اور اج طاقتون ط اور ق
و تعبیر کرتے ہین اور زاویہ ب اج = ل شکل متوازی الاضلاع



اب دج پورے کرو۔
تو اَدَ طَ اور قَ کے حاصل کو تعبیر
کریگا اس حاصل کو ہم حَ سے تعبیر
کرتے ہین۔

اب بموجب علم مثلث کے اد^2 = (اب)^2 + (اج)^2 + ۲ اب × اج
جم ب اج

پس ح^2 = ط^2 + ق^2 + ۲ طق × جم α ۔ مثلاً فرض کرو کہ ط = ق اور
α = ۶۰ تو جم ۶۰° = $\frac{1}{2}$ تو

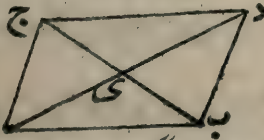
(ح^2) = (ط^2) + ط^2 + ط^2 = ۳ (ط^2) ∴ (ح) = ط $\sqrt{3}$

زاویہ α چاہے جتنا ہو اگر طاقت ط = ق تو ح^2 = (ط^2) + (ط^2) + (۲ ط^2) جم α

= ۲ (ط^2) (۱ + جم α) مگر (۱ + جم α) = ۲ جم^2 $\frac{\alpha}{2}$

∴ (ح^2) = ۴ (ط^2) جم^2 $\frac{\alpha}{2}$ اسلئے ح = ۲ ط × جم $\frac{\alpha}{2}$

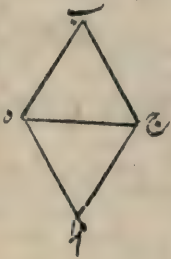
(۱۳) فرض کرو کہ اب اور اج دو طاقتوں کو تعبیر کرتے ہین اور
اد اُن کے حاصل کو ج ب دو ہر وتر متوازی الاضلاع کا کھینچو پس
چونکہ متوازی الاضلاع کے وتر آپسمین تنصیف کرتے ہین ∴ ج ی =
ی ب کے اور اد = ۲ ای پس ان دونون طاقتون کا حاصل
اسطرح معلوم ہو سکتا ہے کہ نقاط ج
اور ب مین خط وصل کرین اور ج ب



کے نقطہ ی پر تنصیف کرین تو ای حاصل کی سمت ہوگی اور حاصل کا مقدار

دوچنداہی ہوگا +

(۴۲) فرض کرو کہ تین مساوی طاقتین ایک نقطہ پر عمل کرتی ہین اور ہرایک کے سمت باقی دو طاقتون کی سمتون سے ۱۲۰° کا زاویہ بناتی ہے۔ پس یہ ظاہر ہے کہ وہ جسم ساکن رہیگا کیونکہ کوئی وجہ نہین کہ ایک سمت مین حرکت کرے اور دوسری سمت مین نکرے



یہ نتیجہ طاقتونکی متوازی الاضلاع کے مطابق ہے

فرض کرو کہ ہ ا۔ اور ہ ب دو مساوی خطوط ہین اور اِن کا زاویہ درمیانی یعنی ا ہ ب ۱۲۰° ہے +

شکل متوازی الاضلاع ہ ا ج ب پوری کرو۔ پس ا ج = ہ ب = ہ ا۔ اِسلیے زاویہ ا ج ہ = ا ہ ج = ۶۰°۔ اِسلیے مثلث ہ ا ج مساوی الاضلاع ہے اور ضلع ہ ج مساوی ہ ا کے اِسلیئے یہ ثابت ہوا کہ اگر دو مساوی طاقتونکا درمیانی زاویہ ۱۲۰° کا ہو تو اُن کا حاصل اُن مین سے کسی ایک طاقت کے برابر ہوگا اور اُنکی درمیانی زاویہ کی تنصیف کریگا +

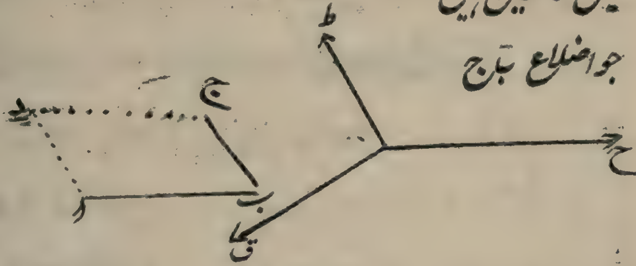
(۴۳) فرض کرو کہ تین قوتین ایک ذرہ پر عمل کرتی ہین اور اُسے ساکن رکھتی ہین اور اِن مین سے دو قوتین باہم برابر ہین تو تیسری قوت باقی طاقتون کی سمت سے برابر زاویہ بنائیگی +

اِسلیے یہ حاصل ہوتا ہے کہ اگر دو طاقتون کا حاصل مقدار مین اُن مین سے کسی ایک طاقت کے مساوی ہو تو دوسری طاقت اُس خط

مستقیم پر عمود ہوگی جو حاصل اور اُسکے مساوی طاقت کے درمیانی زاویہ کو تنصیف کرتا ہے *

(۴۴) اگر کسی مثلث کے تین ضلعے سمت تحریک اور مقدار مین تین طاقتون کے جو ایک جسم پر عمل کرتی ہین علی الترتیب دال ہون تو یہ طاقتین اُس جسم کو ساکن رکھینگی - فرض کرو کہ ا ب ج ایک مثلث ہو اور ط - ق - ح تین طاقتین ہین -

جو اضلاع ب ج



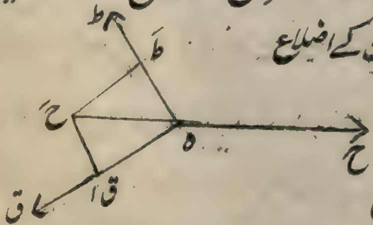
ج ا - ا ب کے متناسب ہین - فرض کرو کہ یہ طاقتین ایک ذرہ پر عمل کرتی ہین - ط متوازی ب ج کے اور ق متوازی ج ا کے اور ح متوازی ا ب کے تو یہ ذرہ ساکن ہوگا *

ا د ج ب کا متوازی کھینچو اور ج د ب ا کا جن طاقتونکو ا ب و ا د مقدار و میل مین دال ہین اُن کا حاصل ا ج سے مقدار و میل مین تعبیر ہوگا - پس جن طاقتون کے ا ب ا د و ج ا دال ہون گر اِن مین اعتدال ہوگا - اور ا د مساوی اور متوازی ب ج کے ہے - پس ہمارا دعویٰ ثابت ہوا *

(۴۵) شکل مذکورہ کا نام طاقتون کا مثلث ہے - طالب العلم کو اِسکے دعویٰ

پر خوب غور کرنی چاہیے تاکہ اُسکی صحت سمجھی۔ الفاظ علی الترتیب پر خیال رکھنا چاہیے اگر ایک طاقت کا اب دال ہو تو باقیون کے ب ج ج ا۔ دال ہونی چاہئیین نہ ب ج اور اج یا ج ب اور ج ا یا ج ب ا ط اج نیز اس بات کا لحاظ رکھنا چاہیے کہ طاقتین ایک ہی نقطہ پر عمل کرتی ہین یعنی اُن کا عمل انفعال ایک ہی مشترک نقطہ ہی پس طاقتون کی سمتین درحقیقت خطوط اب ب ج اور ج ا سے تعبیر نہین کی گئین بلکہ اُنکے متوازی خطوط سے جو ایک نقطہ سے کھنچے جاوین۔ مبتدی اسباب مین غلطی کھا جاتے ہین اور خیال کرتے ہین کہ طاقتین جو خاص خطوط اب و ب ج و ج ا سے مقدار اور مقام حرکت مین تعبیر ہون جسم کو ساکن رکھینگے یعنی وہ اس شرط کو فراموش کر دیتے ہین کہ طاقتین ایک ہی نقطہ پر عمل کرتی ہین۔ طالب العلم کو اس شرط پر متوجہ کرنے کیلئے ہمنے دعوی مین بجائے لفظ سمت کے لفظ سمت تحریک رکھا ہے کیونکہ لفظ سمت مقام طاقت کی بجائے تصور ہو سکتا ہے ؏

(۳۶) اگر تین طاقتین ایک ذرہ پر عمل کرین اور اُسی ساکن رکھین اور ایک مثلث بنایا جاوے۔ جسکے ضلع ان طاقتون کے خطوط میلان کے متوازی ہون تو اُس مثلث کے اضلاع اُن طاقتون کے متناسب ہونگے جنکے وہ جدا گانہ متوازی ہین



فرض کہ طاقتین ط ۔ ق اورح جو نقطہ ۃ پر عمل کرتی ہین اُسکو ساکن رکھتی ہین ط کے خط میلان ہین نقطہ ط ا ۔ اور ق کے خط میلان ہین نقطہ ق ا ۔ اسطرح فرض کرو کہ ۃ ق / ۃ ط = ق / ط متوازی الاضلاع ۃ طرح ق پورا کرو تو ۃ ح طاقتون ط ق کے حاصل کو مقدار و میل ہین تعبیر کریگا اسلیئے نقطہ ح خط مستقیم ح ۃ خارجہ ہین ہوگا ۔ پس مثلث جسکے ضلعے ان طاقتون کی سمتون کے متوازی ہونگے وہ مثلث ۃ ط ح کا متشابہ ہوگا اور اس واسطے اُسکے ضلعے بھی مقدار ہین ان طاقتونکی متناسب ہونگے ۔

(۳۷) اگر تین طاقتین ایک نقطہ پر عمل کرین اور اُسی ساکن رکھین اور ایک مثلث بنایا جاوے جسکے ضلعے ان طاقتون کے خطوط میلان پر عمود وار ہون تو اُس مثلث کے ضلعے اُن طاقتونکی متناسب ہونگی جو جدا گانہ اُسکے ضلعونپر عمود ہین

فرض کرو کہ ا ب ج ایک مثلث ہی اگر خطوط ا ب ج پر عمود کھینچے جاوین تو اُن کا درمیانی زاویہ ا زاویہ کے مساوی ہوگا اور علی ہذا القیاس پس جس مثلث کے اضلاع ا ب ج مثلث کے اضلاع پر عمود ہونگے اُس مثلث کے زاوئے بھی مثلث ا ب ج کے زاویون کے برابر ہونگے یعنی یہ دونون مثلث متشابہ ہونگے ۔ جو ضلع کہ ب ج پر عمود ہوگا وہ ا کے برابر زاویہ کے مقابل ہوگا اور علی ہذا القیاس ا ب بموجب حد ۲۶ کے طاقتین ایک ایسی مثلث کی ضلعونسی تعبیر ہونگی جو اُنکی خطوط تحریک کے متوازی ہونگی اور اسی سبب سے اُس مثلث کے ضلعونسی بھی تعبیر ہونگی جو اُنکے خطوط تحریک پر عمود وار ہین ۔

ج

ب

ا

(۳۸) اگر تین طاقتین ایک نقطہ پر عمل کرین اور اُسکو ساکن رکھین تو
ر ایک طاقت باقی اور طاقتون کے سمتونکے درمیانی زاویہ کی جیب سے
تناسب ہوگی۔ فرض کرو کہ طاقتین ط ق ح نقطہ ہ کو ساکن رکھتے
ین بموجب حد ۳۶ کے ط : ق : ح :: ہ ط : ط ح : ح ہ
بموجب علم مثلث کے ہ ط : ط ح : ح ہ
جیب ط ح ہ : جیب ط ہ ح : جیب ح ط ہ ==
جیب ق ہ ح : جیب ح ہ ط : جیب ط ہ ق

(۳۹) اِسکے برعکس اگر تین طاقتین ایک نقطہ پر عمل کرین اور ہر ایک
قی دو طاقتون کے درمیانی زاویہ کے جیب کے تناسب ہو تو وہ
اقتین اُس نقطہ کو ساکن رکھینگی بشرطیکہ اگر ایک خاص شرط پوری
و جاے یہ شرط وہی ہے جو دفعہ ۳۴ و ۳۵ مین الفاظ علی الترتیب
سے ظاہر کئے گئے مثلاً اگر دفعہ ۳۶ کے شکل مین ط ہ و ہ ق دو طاقتون کے
متون کو تعبیر کرین تو تیسری طاقت ح ہ سے تعبیر ہونی چاہیے نہ ہ ح
سے اِس شرط کو ہم اسطرح بیان کرتے ہین کہ تیسری طاقت کی سمت
قی دو طاقتون کے درمیانی زاویہ کے باہر گذرنے چاہیے اِس
فعہ مین لفظ سمت اُسی معنی مین لیا گیا ہے جیسا کہ دفعہ ۱۱ مین +

(۴۰) اگر دو طاقتین ایک ذرہ پر عمل کرین تو اُن کا اثر برابر ہوگا ایک تیسری طاقت کے جسکا میل اور مقدار اُن دو طاقتون پر ملحوظ ہے اور معلوم ہو سکتا ہے اِسی طرح سے اگر دو طاقتین کسی جسم کی ایک نقطہ پر عمل کرین تو یہ صاف ہے کہ اُن کا اثر حالت اول جیسے تیسری طاقت کے برابر ہوگا جو کہ جسم کے اُسی نقطہ پر عمل کریگی۔ پس جو نتایج اُن طاقتون کی بابت حاصل ہوئی ہین جو ایک ذرہ پر عمل کرتے ہین اُن طاقتونکی بابت بھی صحیح ہو سکتی ہین جو کہ ایک جسم کے کسی نقطہ پر عمل کرتی ہون اور آئندہ ایسے نتایج کے بیان کرنے ہین ہم الفاظ جسم پر نہین لکھینگے صرف یہ کہینگے کہ طاقتین ایک نقطہ پر عمل کرتے ہین۔ اِسی طرح سے ۲۷ حد کے) دعوی مین ذرہ پر کے عوض نقطہ پر لکھنے سے کچھ تبدیلی نہ ہو جاۓ گی*

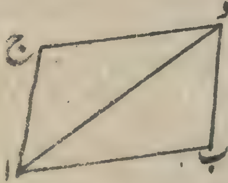
اگر تین طاقتین ایک نقطہ پر عمل کرین تو ہم اُن کا حاصل اِس طور پر پا سکتے ہین کہ اول دو طاقتون کا حاصل معلوم کرین پھر اس حاصل اور تیسری طاقت کا حاصل معلوم کرین اس طرح سے تین طاقتون کا حاصل معلوم ہو جائے گا بلکہ تین سے زیادہ طاقتون کا بھی معلوم ہو سکتا ہے اِس کا حال تشریحاً آئندہ بابین بیان ہوگا۔

(۴۱) اگر تین طاقتین ایک سطح مین عمل کرین اور ایک جسم کو ساکن رکھین تو اُن کے خطوط میلان یا تو ایک نقطہ پر ملینگے یا سب متوازی ہونگے*

فرض کرو کہ دو طاقتون کے خطوط میلان ایک نقطہ پر ملتے ہین تو ہم فرض کر سکتے ہین کہ یہ طاقتین اس نقطہ پر عمل کرتی ہین اور ان دونون کو دو

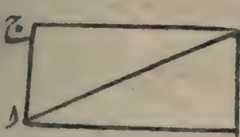
کرکر اُن کا حاصل انکی بجاے رکھہ سکتے ہین اب جسم کے ساکن رہنے کیواسطے یہ بات ضرور ہے کہ یہ حاصل اور باقی تیسری طاقت باہم برابر ہون اور سمت مخالف مین عمل کرتی ہون پس تیسری طاقت کا میلان باقی دو طاقتون کے خطوط میلان کے نقطہ تقاطع مین سے ہوکر گزریگا پس یہ طاقتین ۲۳۶ حد کے شرایط کے مطابق ہون گے ۔ تین متوازی طاقتون کی سکون کی شرایط جو ایک جسم پر عمل کرتی ہون چوتھے باب مین بیان ہونگی ؛

(۲۴۲) جسطرح ہم دو طاقتون کو ایک طاقت مین اتصال کر سکتے ہین ۔ اُسی طرح ہم ایک طاقت کو دو طاقتون مین منفصل کر سکتے ہین فرض کرو کہ خط ا د ایک طاقت کو تعبیر کرتا ہے ایک متوازی الاضلاع اب دج بناؤ جسکا وتر ا د ہو پس جس طاقت



کو خط ا د تعبیر کرتا تھا دو طاقتون مین جنکو اب اور اج تعبیر کرتے ہین منفصل ہو گئی اسطرح سے ہم ایک طاقت کو کسی دو جزو مین تقسیم کر سکتے ہین جنکی سمت مقرر کرنا ہمارے اختیار مین ہے جس صورت مین ایک طاقت ایسی طاقتون مین منفصل ہو جو کہ ایک دوسرے پر عمود وار ہین اُس صورت کا حال کچھ علیحدہ لکھنا ضرور ہے ۔ فرض کرو کہ زاویہ ب اج ایک قایمہ ہے اور (ع) زاویہ د اب کو تعبیر کرتا ہے پس اب = اد جم ع کے اور اج = ب د = اد جب ع کی اسطرح

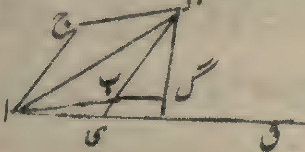
کوئی طاقت ق دو طاقتون مین یعنے ق جم ۶ اور ق جب ۶ مین جو ایک دوسری پر عمود وار عمل کرتے ہین منفصل ہو سکتی ہے۔ ان مین سے



ایک جزو منفصلہ ق جم ۶ اصلی طاقت ق کے سمت سے زاویہ (۶) بناتی ہے

(۴۳) حد بالا کے پہلے حصہ سے معلوم ہوتا ہے کہ ہم ایک طاقت کو دو طاقتون مین کسی طرح سے منفصل کر سکتے ہین آیندہ ہم جب کسی طاقت کا جزو منفصلہ بہ سمت معین کہینگے تو ہماری یہ مراد ہوگی کہ وہ طاقت دو طاقتون مین منفصل کی گئی ایک سمت معین مین دوسری اُس سمت معین کے عمود وار اور پہلے حصہ کو ہم جزو منفصلہ بہ سمت معین کہینگے ٭

(۴۴) اگر دو طاقتین ایک نقطہ پر عمل کرتی ہون تو اُن کے حاصل کا کسی خاص سمت مین جزو منفصلہ مساوی ہوگا اُسی سمت مین اُس کے ہر دو جزو کے اجزا منفصلہ کی حاصل جمع کے۔ فرض کرو کہ اب اور اج دو طاقتین ہین اور اد اُن کا حاصل ہے اق ایک خط مستقیم نقطہ ا مین سے نکلتا ہے۔ ب ی اور د ف اق پر عمود ڈالو اور ب گ



اق کا متوازی کھینچو
اف حاصل اد کا
اق کی سمت مین جزو منفصلہ

ہے اور ای + ف = اف اسی جزو اب کا جزو منفصلہ اق کی سمت سے ہے اور ی ف = ب گ کے یعنی جزو منفصلہ اج کے اق کی سمت مین

کیونکہ ج د اج کا مساوی اور متوازی ہی

(۴۵) اسے ہم طاقتون کے متوازی الاضلاع کا ثبوت لکھتے ہین یہ ڈیوکیلا یا ڈیوشیلا کے نام سے مشہور ہی جس نے اول اسکو دریافت کیا یہ ثبوت تین حصون مین منقسم ہے اول مین حاصل کی صرف سمت ثابت کی گئی ہے جبکہ طاقتین کا مادہ یعنی صحیح الحصص ہون دوسری جبکہ طاقتین ناقص ہون یعنی غیر صحیح الحصص ہون تیسری حصہ مین شکل مذکور کی حاصل مقدار کیلیے ثابت کی گئی ہی ٭

(۴۶) ابتداے مین ہمین یہ بیان کرنا لازم ہی کہ ہم اس بات کو فرض کر لیتے ہین کہ جب دو مساوی طاقتین ایک ذرہ پر عمل کرتی ہین تو اُن کے حاصل کی سمت اُسی سطح مین ہوگی جسمین وہ طاقتین ہین اور حاصل اُن طاقتون کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کریگا یہ بات خود ظاہر ہے کیونکہ اسکی کوئی وجہ نہین معلوم ہوتی کہ حاصل طاقتون کے سطح کی ایک طرف مین دوسری کی نسبت کیون زیادہ مایل ہو اور کوئی اسکی دلیل نہین کہ وہ حاصل ایک طاقت کے دوسری طاقت کی نسبت زیادہ قریب ہو۔ دو مساوی خطوط مستقیم پر جو ایک نقطہ پر ملتی ہین ایک متوازی الاضلاع بنایا جاوے تو اُس کا جو وتر اُس نقطہ مین سے ہوکر گذرتا ہے خطوط مفروضہ کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کریگا ٭

پس جبکہ دو طاقتین مساوی ہون تو طاقتونکی متوازی الاضلاع کا اصول

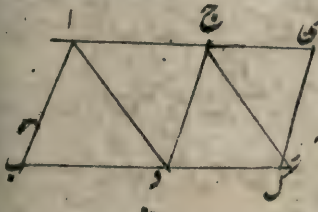
صحیح ہے جہانتک کہ دریافت سمت سے متعلق ہے ☩

(۴۷) ثبوت طاقتون کے متوازی الاضلاع کا جسقدر کہ حاصل کی سمت سے تعلق رکھتا ہے جبکہ طاقتین کاملہ یعنی صحیح التحصص ہون ؞

فرض کرو کہ یہ شکل دو طاقتون ط اور ق کیواسطے جو آپسمین ایکنا زاویہ بناتی ہین صحیح ہی اور نیز دو طاقتون ط اور ح کے واسطے جو اسی قدر زاویہ بناتے ہین صحیح ہے تو ہم ثابت کرینگے کہ یہ شکل دو طاقتون ط اور ق ح کیواسطے جو اسی قدر زاویہ بناتے ہین صحیح ہوگی -

فرض کرو کہ نقطہ آ مقام انفعال طاقتونکا ہے اور طاقت ط آب کی سمت مین عمل کرتی ہے اور (ق + ح) اي کی سمت مین

فرض کرو کہ آب اور اج طاقتون ط اور ق کو مقدار مین اور ج ی طاقت ح کو مقدار مین تعبیر کرتے ہین



متوازی الاضلاع اج د ب اور ج ی گ د پوری بناؤ بموجب حد۔ ۲ کے طاقت ح کا نقطہ ج پر بجاے نقطہ ا کے عمل کرنا فرض کر سکتے ہین اور اسی واسطے ج ی اسکو مقدار اور میلان مین تعبیر کریگا

اب بموجب فرض کے ط اور ق کا حاصل اد کی سمت مین عمل کرتا ہے ہم ط اور ق کی بجای اُن کا حاصل ر کہتے ہین اور اس حاصل کو نقطہ ا سے نقطہ د پر انتقال کرتے ہین اب جو طاقت د پر عمل کرتی ہے اسکو دو جزون مین منفصل کرو ایک ج د کی سمت مین دوسرا د گ کی

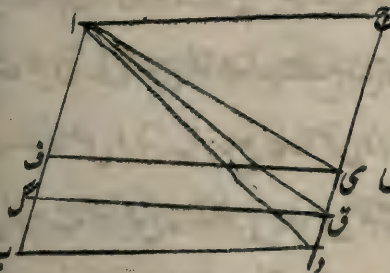
ں سمت ہین یہ دونون جزو جداگانہ ط اور ق ہونگے۔ ط کو نقطہ ج پر اور
ں کو نقطہ گ پر عمل کرتا ہوا فرض کر سکتے ہین
ور جب فرض کے ط جو ج د کی سمت مین عمل کرتی ہے اور طاقت ح جو ج ی
ں سمت مین عمل کرتی ہے اُن کا حاصل ج گ کی سمت مین عمل کرتا ہے
ط اور ح کی جگہ اُن کا حاصل رکھو اور اسکو نقطہ گ پر انتقال کرد۔
سی طرح سے ہم اُن طاقتون کو جو نقطہ ا پر عمل کرتی تھین بغیر بدلنے اُنکی
ثیر کے نقطہ گ پر لے آئے پس بموجب حد۔ ۲ کے یہ نتیجہ نکلتا ہے ہین کہ گ
اقت ط اور ق +ح نقطہ آ پر عمل کنندہ کی حاصل کی سمت مین ایک
نقطہ ہے یعنی ط اور ق +ح کا حاصل وترا گ کی سمت مین عمل کرتا ہے
س ثابت ہوا کہ اگر یہ شکل متوازی الاضلاع ط اور ق کیواسطے اور
ط اور ح کیواسطے صحیح ہو تو ط اور ق +ح کیواسطے صحیح ہوگی مگر یہ
شکل دو مساوی طاقتون ط اور ط کیواسطے صحیح ہے تو ط اور ۲ ط کیواسطے
صحیح ہے اور اِسلئے ط اور ۳ ط کیواسطے صحیح ہے اور علیٰ ہذا القیاس
س یہ شکل ط اور ن ط کیواسطے صحیح ہے جہان ن کوئی عدد صحیح
د +

ور چونکہ یہ شکل ط اور ن ط کیواسطے صحیح ہے اِسلئے ۲ ط اور ن ط
کیواسطے صحیح ہے اور اسیطرح ۳ط اور ن ط کیواسطے صحیح ہے اور علیٰ ہذا القیاس پس
شکل م ط اور ن ط کیواسطے صحیح ہے۔ جہانکہ م کوئی صحیح
عدد ہے +

پس یہ شکل کسی دو طاقتون کاملہ کیواسطے ثابت ہوئی +

(۴۸) ثبوت طاقتون کی متوازی الاضلاع کا متعلق دریافت سمت حاصل جبکہ طاقتین ناقصہ یعنی غیرصحیح المحصص ہون +

اِس حالت مین نتیجہ اسطرح بھی حاصل ہو سکتا ہے کہ جبکہ دو مقدار ناقصہ ہون یعنی جب اُن دونونکی نسبت باہم ٹھیک عدد صحیح مین ظاہر نہین ہوسکتی تو ایسی عدد دریافت ہو سکتے ہین جو حتی الامکان اُنکی نسبت کو پورا ظاہر کرین +



یہ نتیجہ دلیل خلف سے بھی ثابت ہوسکتا ہے۔

فرض کرو کہ آب اوراج دو غیرصحیح المحصص طاقتون کو تعبیر کرتے ہین متوازی الاضلاع ب ج بناؤ آب اگر اِن طاقتون کا حاصل ا د کے سمت مین عمل نہین کرتا تو فرض کرو کہ ا ی کی سمت مین عمل کرتا ہے ی ف ج ا کا متوازی کھینچو +

اج کو کسی قدر مساوی حصون مین تقسیم کرو جنمین سے ہرایک دی سے چھوٹا ہوتا ورج د پر ایسے حصون کے برابر قطع کرتے جاؤ۔ فرض کرو کہ ق اخیر حصہ کا مقام ہے تو ق دا وری کے درمیان واقع ہوگا ق ک ج ا کا متوازی کھینچو +

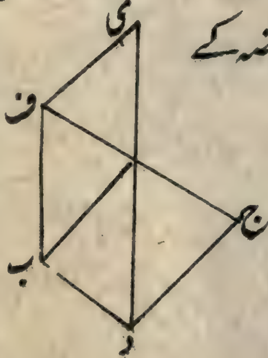
تو طاقتون کا حاصل جو اج اور اک سے تعبیر ہوتی ہین اق کی

سمت مین ہوگا کیونکہ دونون طاقتین صحیح الحصص ہین پس طاقت
اج اور اب مساوی ہین اُس طاقت کے جو اق کی سمت مین عمل
کرتی ہے مع ایک اور طاقت کے جو گ ب کے مساوی ہے اور
نقطہ ا پر اب کی سمت مین عمل کرتی ہے اب یہ ظاہر ہے کہ ان
دونون کا حاصل اق اور اب کے درمیان ہونا چاہیئے لیکن بموجب
فرض کے اہی اُن کا حاصل ہے جو کہ اق اور اب کے درمیان
نہین اور یہ ناممکن ہے +

اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہین کہ سوا ای اد کے اور کسی سمت مین ان
طاقتون کا حاصل عمل نہین کرتا یعنی ادہر اُنکی حاصل کی سمت ہے .

پس طاقتون کا متوازی الاضلاع جسقدر کہ حاصل کی سمت سے تعلق رکھتا
ہے ثابت ہوگیا خواہ طاقتین صحیح الحصص ہون خواہ غیر صحیح الحصص

(۴۹) ثبوت طاقتون کے متوازی الاضلاع کا متعلق دریافت مقدار حاصل



فرض کرو کہ اب اور اج طاقتون مفروضہ کے
سمتین ہین اور اد انکی حاصل
کی سمت اد کے مقابل خط ای
کا طول اتنا لو کہ ان طاقتون کی
حاصل کے مقدار کو تعبیر کرے

اب یہ طاقتین جنکو اب اور اج اور ای تعبیر کرتے ہین ایک دوسری کی
اثر کو زائل کرتی ہین یعنے ساکن ہین ای اور اب اضلاع متصلہ

سمجھکر متوازی الاضلاع اب ف ی بناؤ تو وتر اف ای اور اب حاصل کی سمت ہے

پس آج اور اف ایک ہی خط مستقیم مین ہین اور شکل اف ب د ایک متوازی الاضلاع ہو۔ پس ا د برابر ہے ب ف کے لیکن ب ف برابر ہے ای کے اسلیئے ای = آد۔ لے پس وتر آو ان طاقتونکے حاصل کو مقدار اور سمت دونون مین تعبیر کرتا ہے

پس اسطرح سے طاقتون کا متوازی الاضلاع ثابت ہوگیا

سوالات نمبر (۲)

(۱) دو طاقتین ایک ذرہ پر عمل کرتی ہین اور اُن کا سب سے بڑا اور سب سے چھوٹا حاصل ۲۷ اور ۶۵ پونڈ ہے تو بتاؤ کہ وہ طاقتین کیا ہین

(۲) دو طاقتین ۱۲۔ اور ۳۵ پونڈ کے ایک ذرہ پر جداگانہ علی القوایم عمل کرتی ہین تو اُن کا حاصل معلوم کرو ۰

(۳) دو طاقتین جنکے مقدارون مین ۳/۴ کی نسبت ہے ایک ذرہ پر عمود وار عمل کرتی ہین۔ اور اُن کا حاصل ۱۵ پونڈ ہے تو طاقتون کو معلوم کرو

(۴) دو طاقتین جنمین سے ایک دوسری سے دوچند ہے ایک ذرہ پر عمل کرتی ہین اور ایسے ہین کہ اگر بڑی طاقت مین ۶ پونڈ زیادہ کیے جایئن اور چھوٹی طاقت دوچند کی جائے تو اُنکے حاصل کی سمت مین کچھ فرق نہ ہوگا تو طاقتون کو معلوم کرو ۰

(۵) ثابت کرو کہ اگر زاویہ جس پر دو طاقتین مفروضہ مایل ہون بڑھتا جاوے
تو اُن کا حاصل گھٹتا جائیگا ۔

(۶) دو طاقتین ایک ذرہ پر عمل کرتی ہین اور اُن مین سے ایک ۵
پونڈ ہے اور اُن کا حاصل بھی ۵ پونڈ ہے اور طاقت معلومہ سے
زاویہ قایمہ بناتا ہے تو دوسری طاقت کے مقدار اور سمت
دریافت کرو ۔

(۷) اگر دو طاقتون کا حاصل اُن مین سے کسی ایک طاقت کے ساتھ
زاویہ قایمہ بناتا ہو تو ثابت کرو کہ وہ دوسری طاقت سے کم ہوگا ۔

(۸) اگر دو طاقتون کا حاصل اُن مین سے ایک پر عمود وار ہو اور دوسری
سے آدھا ہو تو طاقتون مین کیا نسبت ہوگی ۔

(۹) اگر تین پونڈ اور ۴ پونڈ کی طاقت کا حاصل ۵ پونڈ ہو تو دونون
طاقتون کا درمیانی زاویہ کیا ہوگا ۔

(۱۰) اگر دو طاقتون کی نسبت جو ایک دوسری سے زاویہ قایمہ پیدا
کرتی ہین $\frac{1}{3}$ ہو اور اُن کا حاصل ۱۰ پونڈ ہو تو طاقتون کو دریافت کرو ۔

(۱۱) ۳ ۴۳ - اور ۶۵ پونڈ کی طاقتون کو ایک ذرہ پر کس طرح سے لگاوین
کہ اُن کا حاصل ۲۲ پونڈ ہو

(۱۲) دو طاقتین ط اور ۲ ط ایک نقطہ پر کس زاویہ کی دوری پر عمل
کرین کہ اُنکے حاصل کی سمت اُن مین سے کسی ایک طاقت کی سمت
سے زاویہ قایمہ بنادے ۔

(۱۳) - ڈو ڈوری ۶ اور ۸ انچ طول مین ہین اور اُنکا ایک ایک سرا دو مقامون پر بندھا ہے جنکا فاصلہ ۱۰ انچ کا ہے اور ڈوریون کے دوسرے سرے آپسمین بندھی ہوئی ہین اور وہ دونون ڈوری ایک ۵ پونڈ کی وزن سے جو اُس گرہ پر اُن دو نقطون کے وصل کنندہ خط پر عمودوار عمل کرتا ہے تنی ہوئی ہین تو ہر ایک ڈوری کی کشش معلوم کرو +

(۱۴) آب اور آج ایک متوازی الاضلاع کے اضلاع متصلہ ہین اور آد وتر ہے اور آب کے نقطہ ی پر تنصیف ہوئی ہے
تو ثابت کرو کہ اُن طاقتون کا حاصل جنکو آد اور آج تعبیر کرتی ہین - اُن طاقتون کے حاصل سے دوچند ہوگا جنکو آی اور آج تعبیر کرتے ہین +

(۱۵) دو طاقتین مقدار اور سمت مین ایک دائرہ کی دوری سے تعبیر کیجاتی ہین اور یہ دونون وتر دائرہ کے محیط کے کسی نقطہ سے آپسمین عمودوار کھینچے گئے ہین تو ثابت کرو کہ اُن کا حاصل مقدار سمت مین دائرہ کے اُس قطر سے تعبیر ہوگا جو اُس نقطہ سے ہوکر گذرتا ہے

(۱۶) آ اور ب دو مقام معین ہین ایک نقطہ پ پر مفروضہ مقدار کی طاقتین پ آ اور پ ب کی سمت مین عمل کرتے ہین اگر اُن کا حاصل مقدار معین کا ہو تو ثابت کرو کہ نقطۂ پ دو مساوی قوسون

مین سے ایک پر واقع ہوگا جو وتر اب سے محدود ہوجن گئے ؛

باب سوم ان طاقتون کے بیان مین جو ایک ذرہ پر ایک سطح مین عمل کرتی ہین

(۵۰) اس باب مین ہم بیان کرینگے کہ کسی قدر طاقتون کا جو ایک سطح مین ایک ذرہ پر عمل کرتی ہین حاصل کسطرح دریافت کیا جاتا ہے یہ بات ذرہ مختصر طور پر پہلے بیان ہوچکی ہی (دیکھو حد ۴۰)

(۵۱) درباب دریافت حاصل کسی مقررہ تعداد طاقتون کے جو ایک ہی خط مستقیم مین کسی ذرہ پر عمل کرتی ہین ؛

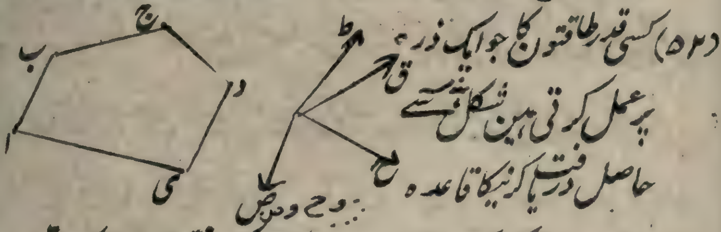
جبکہ کئی ایک طاقتین ایک ذرہ پر ایک ہی سمت مین عمل کرتی ہین تو دونون کا حاصل اُنکی حاصل جمع کے مساوی ہوتا ہی

جبکہ کئی طاقتین ایک سمت مین عمل کرتی ہین اور باقی طاقتین مخالف سمت مین تو ہر ایک سمت کی طاقتون کا مجموعہ اُس سمت کی کل طاقتون کی تاثیر کے برابر ہوگا اور کل طاقتون کا حاصل اُن دو مجموعون کی حاصل تفریق کے برابر ہوگا اور بڑی مجموعہ کی سمت مین عمل کریگا ؛

اگر ایک سمت کی طاقتین مثبت خیال کی جاوین اور دوسرے سمت کی منفی تو کل طاقتون کا حاصل اُنکی جبریہ حاصل جمع کے برابر ہوگا اور اِس مجموعہ کی علامت سے حاصل کی سمت معلوم ہوگی ؛

اگر انکی جبریہ حاصلجمع برابر صفر کی ہی تو طاقتین ساکن ہونگی اور برعکس اسکے اگر طاقتین ساکن ہونگی تو انکی جبریہ حاصلجمع مساوی صفر کی ہوگی

(۵۲) کسی قدر طاقتون کا جو ایک ذرہ پر عمل کرتی ہین شکل ۲۲ سے حاصل دریافت کرنیکا قاعدہ



فرض کرو کہ طاقتین ط و ق - ایک نقطہ پر عمل کرتی ہین ایک نقطہ ا فرض کرو اور ایک خط ا ب کھینچو جو طاقت ط کو مقدار اور سمت مین تعبیر کرے اور نقطہ ب سے ب ج ایسا خط کھینچو جو طاقت ق کو میلان اور مقدار مین تعبیر کرے اور

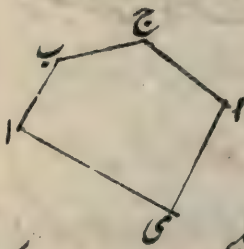
اور نقطہ ج سے ج د ایسا خط کھینچو جو طاقت ح کو مقدار اور میلان مین تعبیر کرے اور د سے د ی ایسا خط کھینچو جو طاقت ص کو مقدار اور میلان مین تعبیر کرے ا ی کو وصل کرو تو اسی مقدار و میلان مین اِن طاقتون کی حاصل کو تعبیر کریگا ۔

کیونکہ ط اور ق کی حاصل کو خط ا ج تعبیر کریگا - اور پھر طاقتہائے تعبیر شدہ ا ج اور ج د کے حاصل کو ا د تعبیر کریگا یعنی ا د طاقتہائے ط و ق و ح کے حاصل کو تعبیر کریگا - علی ہذالقیاس یہ قاعدہ کسیقدر طاقتونکی تعداد دیکھو اسطے عمل مین

اُ سکتا ہے جو ایک ذرہ پر عمل کرتی ہین -
پس یہہ حد طاقتون کی کسی تعداد کیواسطے عمل مین آسکتی ہے -

(۵۳) اگر کسی قدر طاقتین جو ایک جسم پر عمل کرتی ہین مقدار اور میلان مین کسی کثیر الاضلاع کے اضلاع سے علی الترتیب تعبیر کیجاوین تو وہ طاقتین اُس ذرہ کو ساکن رکھینگی ٭

مثلاً ایک کثیر الاضلاع ۵ ضلعون کا ہے اور فرض کرو کہ کئی طاقتین جنکو اب ب ج ج د - د ی اور ی ا تعبیر کرتی ہین ایک ذرہ پر عمل کرتی ہین تو یہ طاقتین ذرہ کو ساکن رکھینگی -



حد بالا کے بموجب اب ب ج ج د د ی کی تعبیر شدہ طاقتون کا حاصل ا ی سے تعبیر ہوگا اور دو طاقتین جنکو ا ی اور ی ا تعبیر کرتے ہین آپسمین ساکن رہینگے

(۵۴) شکل مذکورہ بالا کا نام طاقتون کا کثیر الاضلاع ہے - ۳۵ حد مین جو بیان طاقتون کے مثلث کی بابت ہوچکا ہے وہ اُسکے واسطے بھی درست ہے ٭

طاقتونکے مثلث کا برعکس صحیح ہے جیسا ۳۶ حد مین ثابت ہوچکا لیکن طاقتونکے کثیر الاضلاع کا عکس صحیح نہین یعنی اگر ۴ یا زیادہ طاقتین ایک ذرہ پر عمل کرکے اُسے ساکن رکھین تو ہم یہ نہین کہہ سکتے کہ یہ طاقتین کثیر الاضلاع کے ضلعون سے متناسب ہونگی جسکے ضلعے اِن طاقتون کے خطوط میلان کے متوازی

ہونگے کیونکہ ایک کثیر الاضلاع دوسری کا مساوی الزوایا۔
بغیر اُسکے متشابہ ہونیکی ہو سکتا ہی۔ اگر پہلی حد کی شکل مین
ہم کوئی خط ایک ضلع کا متوازی کھینچین مثلاً ای کا تو ہم
ایک اور کثیر الاضلاع بنا سکتے ہین جسکے ضلعے طاقتونکی خطوط
میلان کے متوازی ہونگے لیکن اس کثیر الاضلاع کو ضلعے طاقتونکی
خطوط میلان سے وہی نسبت نہین رکھینگے جو دوسری
کثیر الاضلاع کے ضلعے نسبت رکھتی ہین۔
(۵۵) حد ۲۵ کا عمل ثبوت اُس صورت مین بھی درست ہی جبکہ
طاقتین ایک سطح مین واقع نہ ہون اور حد (۵۴) مین بھی
کچھ قید نہین کہ کثیر الاضلاع مستوی ہو۔
لیکن علم مثلث کی مدد سے جو قاعدہ کئی طاقتونکی حاصل دریافت
کرنیکا ہم آگے لکھتے ہین اُس مین یہ ضرور ہی کہ طاقتین ایک
سطح مین عمل کرتی ہون۔
(۵۶) کئی طاقتین ایک ذرہ پر ایک ہی سطح مین عمل کرتی ہین اُنکے
حاصل کی مقدار اور سمت مطلوب ہی
فرض کرو کہ ط ق ح طاقتین اور آ ب ج وغیرہ
وہ زاوے ہین جو اُنکی سمتین ایک مفروضہ خط مستقیم سے
جو اُس نقطہ سے نکلتا ہے بناتی ہین +
بموجب حد ۲۴ کے طاقت ط دو حصون مین منفصل ہو سکتی ہی

یعنی ط جم آ خط مستقیم مفروض کی سمت مین اور ط جب ا خط
مفروض کے عمود کی سمت مین اسی طرح سے طاقت ق
ق جم ب اور ق جب ب مین منفصل ہو سکتی ہی اور طاقت ح
ح جم ج اور ح جب ج مین منفصل ہو سکتی ہے اور
علی ہذالقیاس -

اب اجزای منفصلہ کو جو ایک ہی خط مستقیم مین عمل کرتی ہین
جمع کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہی ٭

ط جم ا + ق جم ب + ح جم ج + وغیرہ
خط مفروض کی سمت مین اور

ط جب ا + ق جب ب + ح جب ج + وغیرہ
خط مفروض کی عمود کی سمت مین

اب ہم پہلے حاصل جمع کو (ص) کہتے ہین اور دوسری کو (ی)
پس طاقتہای مفروضہ دو طاقتون (ص) اور (ی) کے
مساوی ہین جو ایک دوسری کی عمود وار عمل کرتی ہین

فرض کرو کہ (ک) اُن کا حاصل ہے اور (ع) وہ زاویہ ہے جو
(ک) کی سمت (ص) کی سمت سے بناتی ہی تو بموجب حد (۲۵)
کے ٭

$ک^2 = ص^2 + ی^2$ -

اور ک جم ع = ص اور ق جب ع = ی

پس حاصل کی مقدار اور سمت دریافت ہو گئی ؀

(۵۷) جب کئی طاقتین ایک جسم پر ایک ہی سطح مین عمل کرتی ہون تو اُنکے سکونکی شرائط دریافت کرو۔

طاقتین ساکن ہونگی اگر اُن کا حاصل برابر صفر کے ہو یعنی حد بالا کے بموجب اگر ک = ۰ اور یہ اُس وقت ہو سکتا ہی جب ص = ۰ اور ی = ۰ یہہ شرائط سکون کیواسطے کافی ہین اِن شرائط کو ہم عبارت مین اِسطرح لکھ سکتے ہین

کسی قدر طاقتون کا مجموعہ جو ایک ذرہ پر ایک ہی سطح مین عمل کرتی ہون اُسکو ساکن رکھیگا اگر طاقتون کی اجزاء منفصلہ کی حاصلجمع دو خطوط مستقیم کی سمت مین جو ایکدوسرے پر عمود وار ہون مساوی صفر کے ہو۔

برعکس اِسکے اگر طاقتین ساکن ہون تو ک = ۰ اور تب ص = ۰ اور ی = ۰ جہان ص طاقتون کے اجزاء منفصلہ کی حاصلجمع کو کسی خط مستقیم کی سمت مین تعبیر کرتا ہی

پس اگر طاقتین جو ایک ذرّہ پر ایک ہی سطح مین عمل کرتی ہین ساکن ہون تو اُن طاقتون کی اجزاء منفصلہ کی حاصلجمع کسی خط مستقیم کی سمت مین مساوی صفر کی ہو گی۔

(۵۸) ابتک ہمنے ایسی طاقتون کا بیان کیا ہی جو ایک ہی نقطہ پر عمل کرتی ہین لیکن ابتدال اتصال کے قاعدون کی استعمال سے

ایسی طاقتون کا بھی حاصل دریافت کر سکتے ہین جو ایک ہی سطح مین مختلف نقطون پر عمل کرتی ہون

فرض کرو کہ اِس قسم کی طاقتین کسی قدر ہین اول اُن مین سے دونون اُن کے خطوط کی سمتون کو یہانتک بڑہاؤ کہ دونون ملجاوین اور اِن دونون طاقتون کو اِس نقطہ پر عمل کرتی فرض کرو۔ اور پھر ان کا حاصل دریافت کرو ان دونون طاقتونکی بجای اِن کا حاصل رکہو پھر اِس حاصل کی سمت کو اور باقی طاقتون مین سے ایک کی سمت کو بڑھاؤ یہان تک کہ آپسمین ملجاوین اور اِن دونون کی بجای اُن کا حاصل رکھو اِسی طرح ہم صحیح صحیح شکلین کہینچکر کل طاقتون کا حاصل معلوم کر سکتے ہین بلکہ اُسکی قیمت عددون مین بھی دریافت کر سکتے ہین صرف ایک صورت مین ہمین کچھ دقت ہوگی یعنی جسمین طاقتین متوازی ہوجاوین اِس کا بیان دوسری باب مین ہوگا

اب ہم دو مثالین لکھتے ہین ؞

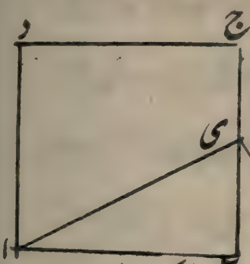
مثال اول

ا ب ج د ایک مربع ہی

فرض کرو کہ (ا) پونڈ کی طاقت

ا د کی سمت مین عمل کرتی ہی اور (۲) پونڈ کی طاقت ا ب کی سمت

اور تین پونڈ کی طاقت ج ب کی سمت مین تو اُنکا حاصل دریافت کرو +



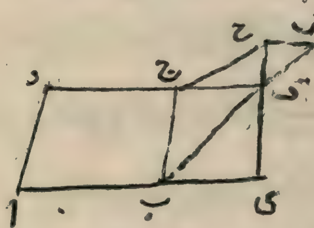
جو طاقتین آب اور آد کی سمت مین عمل کرتی ہین اُن کا حاصل ای کی سمت مین ہوگا اور یہ خط اسطرح سے واقع ہوگا کہ ی ب کو اب سے وہی نسبت ہوگی جو ایک پونڈ کو ہے ۲ پونڈ سے یعنی نقطہ ی خط ب ج کی تنصیف کرتا ہے فرض کرو کہ یہ حاصل ی پر عمل کرتا ہے اُسکو دو اجزا مین منفصل کرو ایک اب کا متوازی دوسرا اد کا متوازی پس ہمکو دو طاقتین حاصل ہوئین ایک (۱) پونڈ کی ی ج کی سمت مین اور دوسری طاقت ۲ پونڈ کی جو نقطہ ی پر اب کے متوازی عمل کرتی ہے مگر ایک طاقت ۳ پونڈ کی ج ب کی سمت مین بھی عمل کرتی ہے پس آخر کار یہ طاقتین حاصل ہوئین ایک طاقت دو پونڈ کی ی ب کی سمت مین اور دوسری (۲) پونڈ کی جو نقطہ ی پر اب کے متوازی عمل کرتی ہے۔

پس کل طاقتون کا حاصل $\sqrt{(4+4)}$ پونڈ یعنی ۲$\sqrt{2}$ پونڈ ہے اور اُسکی سمت نقطہ ی سے گذرتی ہے اور خط ی ب کے ساتھ ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے +

دوسری مثال

اب ج د ایک متوازی الاضلاع ہی کئی طاقتین جو اب اور ب ج اور ج د سے مقدار اور مقام تحریک مین تعبیر کی گئی ہین ایک جسم پر عمل کرتی ہین تو ان طاقتون کا حاصل دریافت کرو

طاقت اب اور ب ج کو نقطہ ب پر عمل کرنا فرض کر سکتے ہین اب کو ی تک بڑھاؤ تاکہ ب ی = اب اب طاقتین اب اور ب ج ب ی اور ب ج سے بھی تعبیر ہو سکتی ہین گ



اور متوازی الاضلاع ب ی ف ج کا وتر ب ف ان کے حاصل تعبیر کریگا

اسی طرح سے طاقت ج د بھی ف ج سے تعبیر ہو سکتی ہے جو کہ ج د کے برابر ہے پس تینون طاقتین مفروضہ دو طاقتون ب ف اور ف ج کے برابر ہین جو نقطہ ف پر عمل کرتی ہین

ب ف کو نقطہ گ تک بڑھاؤ تاکہ ف گ = ب ف اب گویا ہمنے ف گ اور ف ج کا حاصل دریافت کرنا ہے ۰

ی ف کو نقطہ ح تک بڑھاؤ تاکہ ف ح برابر ی ف کے ہو اور ح ج مین خط وصل کرو تو اقلیدس کی بموجب ج ف گ ح ایک متوازی الاضلاع ہوگا اور ف ح ف گ اور ف ج کے حاصل کو تعبیر کریگا

پس طاقتوں اب ب ج ج د کے حاصل کو ف ح مقدار اور مقام تحریک مین تعبیر کریگا

مبتدیوں کو اِس مثال پر توجہ کرنی چاہیئے ہمنے ثابت کیا ہی کہ ب ف اب اور ب ج کا حاصل ہی مبتدی اکثر غلطی سے کہتے ہین کہ ب د اب اور ب ج کا حاصل ہے مگر یہ غلط ہی ب د ب ا اور ب ج کا حاصل ہی نہ کہ اب اور ب ج کا یا مبتدی بعضے وقت یہ کہتے ہین کہ اج اب اور ب ج کا حاصل ہی یہ غلط ہے اج اب اور اد کا حاصل ہی نہ کہ اب اور ب ج کا یا مبتدی یہ کہتے ہین کہ چونکہ طاقتین اب اور ج د مساوی اور مخالف ہین پس وہ ایک دوسری کی اثر کو زائل کر دینگے یہ غلط ہے طاقتین اُس صورت مین ساکن رہتین جب ایک ہی خط مستقیم مین عمل کرتین مگر یہ طاقتین ایک خط مستقیم مین عمل نہین کرتین

سوالات باب سوم

(۱) اگر تین طاقتین جنکو اعداد ۱ و ۲ و ۳ تعبیر کرتی ہین ایک سطح مین عمل کرتی ہون اور ایک نقطہ کو ساکن رکہین تو ثابت کرو کہ یہ طاقتیں ایک ہی خط مستقیم مین عمل کرینگی ✦

(۲) تین طاقتین جنکو اعداد ۱ و ۲ و ۳ تعبیر کرتی ہین ایک ذرّہ پر ایک مثلث مساوی الاضلاع کے علی الترتیب اضلاع کے متوازی سمتون مین عمل کرتی ہین تو اُن کا حاصل دریافت کرو ✦

(۳) کیا ایک ذرّہ ایسی تین طاقتون کے عمل سے ساکن رہ سکتا ہے جنکے مقدار کی نسبت ایسی ہو جیسے ۳ : ۴ : ۷ کو ہی +

(۴) تین طاقتین ایک نقطہ پر ایک مثلث کی علی الترتیب اضلاع کی متوازی عمل کرتی ہین اور اُن عمودون سے عکس نسبت رکھتی ہین جو مثلث کے زاویون سے جداگانہ اُن ضلعون پر گرائی گئی ہین جنکے متوازی طاقتین عمل کرتی ہین تو ثابت کرو کہ یہ طاقتین ساکن ہون گی

(۵) ایک وزن ۲۵ پونڈ کا دو ڈورون سے بندھا ہوا لٹکتا ہی جنکی طول ۳ اور ۴ فٹ جداگانہ ہین اور اُن ڈورونکی دوسرے سرے دو مقامون پر بندھی ہوے ہین جو کہ ۵ فٹ کے فاصلہ پر ایک ہی خط افقی مین واقع ہین تو ہر ایک ڈورہ کی کشش دریافت کرو

(۶) تین طاقتین ایک نقطہ پر عمل کرتی ہین اور ساکن ہین سب سے بڑی طاقت ۵ پونڈ ہی اور سب سے چھوٹی تین پونڈ اور اُن مین سے دو طاقتون کا درمیانی زاویہ قایمہ ہی تو تیسری طاقت دریافت کرو +

(۷) دو مساوی طاقتین ایک ذرّہ پر کسی زاویہ معلومہ کی ساتھ عمل کرتی ہین اور اُن کا حاصل بھی معلوم ہے اگر ایک طاقت کی سمت برعکس کی جائے اور اُس کا مقدار دوچند کیا جاوے

تو حاصل کی مقدار مین کچھ فرق نہین ہوتا تو ثابت کرو کہ ان دونو حاصلون کا حاصل ان مین سے ہر ایک کے مساوی ہوگا۔

(۸) دو مساوی طاقتین ایکذرہ پر کسی زاویہ کے ساتھ عمل کرتی ہین اور اُن کا حاصل معلوم ہے اگر ایک طاقت کے سمت برعکس کی جاوے اور اُس کا مقدار دوچند کیا جاوے تو حاصل کی مقدار کچھ نہین بدلتی تو ثابت کرو کہ دونون مساوی طاقتون کا زاویہ درمیانی ۱۲۰ کا ہوگا

(۹) اہ ب اور ج ہ د ایک دایرہ کے وتر ہین جو ایک دوسرے کو نقطہ ہ پر عمود وار قطع کرتے ہین ہ ا اور ہ ب اور ہ ج اور ہ د طاقتون کو مقدار اور سمت مین تعبیر کرتے ہین تو ثابت کرو کہ انکا حاصل سمت مین اُس خط سے تعبیر کیا جائیگا جو ہ کو اُسی دایرہ کے مرکز سے وصل کرتا ہے اور مقدار مین اُس خط کا دوچند ہوگا۔

(۱۰) اگر ایک دایرہ کے محیط مین مساوی فاصلون پر ۸ نقطے لئے جاوین اور ایک نقطہ سے باقی نقطون تک خطوط مستقیم کھینچے جاوین اگر یہ خطوط طاقتون کو تعبیر کرین جو اُسی نقطہ پر عمل کرتی ہین تو ثابت کرو کہ حاصل کی سمت اُس نقطہ سے کھینچے ہوے قطر سے منطبق ہوگی اور اُس کا مقدار اُس قطر سے چوگنا

ہوگا

(۱۱) ایک دایرہ کا محیط کسی حفبت تعداد کے حصون مین تقسیم ہوا ہے اور ایک نقطہ تقسیم سے باقیون تک خط کھینچے گئے ہین تو ثابت کرو کہ حاصل کی سمت اُس نقطہ سے کھینچے ہوئے قطر سے منطبق ہوگی۔

(۱۲) ۳ و ۴ و ۵ و ۶ پونڈ کی طاقتین اُن خطوط کی سمت مین جدا گانہ عمل کرتی ہین جو ایک مربع کے مرکز سے اُسکے علی الترتیب زاویون تک کھینچے گئی ہین تو اُون کا حاصل معلوم کرو +

(۱۳) کسی نقطہ سے ایک قایمۃ الزاویہ متوازی الاضلاع کے چارون ضلعون پر عمود گرائے گئے ہین جن طاقتون کو یہ عمود تعبیر کرتے ہین اُنکی حاصل کی مقدار اور سمت دریافت کرو +

(۱۴) ایک دایرہ کا محیط کسیقدر مساوی حصون مین تقسیم ہوا ہے اور وہ خط مستقیم جو مرکز سے اُن نقطون تک کھینچے گئے ہین طاقتون کو مقدار اور سمت مین تعبیر کرتے ہین تو ثابت کرو کہ یہ طاقتین ساکن ہونگی +

(۱۵) ثابت کرو کہ (۱۱) سوال کا نتیجہ اُس صورت مین بھی صحیح ہے جبکہ مساوی حصون کے مقدار طاق ہو اور حاصل کے مقدار بھی معلوم کرو +

(۱۶) اب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے جن طاقتون کو اب ب ج اور د ج مقدار اور مقام تحریک مین تعبیر کرتی ہین ایک جسم پر عمل کرتی

ہین تو اُن کا حاصل دریافت کرو +

باب چہارم دو متوازی طاقتون کے حاصل کے بیان مین

(۵۹) جن طاقتون کے خطوط میلان باہم متوازی ہوتے ہین تو اُن کو متوازی طاقتین کہتے ہین اگر اُن کا میل ایک ہی سمت مین ہو تو اُنکو یکجانبہ کہتے ہین اور اگر اُن کا میل مخالف سمتون مین ہو تو اُنکو مخالف کہتے ہین +

(۶۰) دو متوازی یکجانبہ طاقتون کے جو ایک جسم جامد پر عمل کرتی ہین حاصل کے مقدار اور سمت دریافت کرنیکا قاعدہ۔

فرض کرو کہ ط اور ق دو طاقتین ہین جو نقطہ آ اور ب پر جداگانہ عمل کرتی ہین اگر ہم دو طاقتین مساوی مقدار کے خط اب ج کے سرون پر مخالف سمتون مین لگا دین تو ان طاقتون کی تاثیر مین کچھ فرق واقع نہین ہوگا +

فرض کرو کہ ان مین سے ہر ایک س ہے اور ایک نقطہ ا پر ب ا خارجہ کی سمت مین عمل کرتی ہے اور دوسری نقطہ ب پر اب خارجہ کی سمت مین عمل کرتی ہے

تو طاقتین ط اور س جو نقطہ ا پر عمل کرتی ہین ایک طاقت

ص کے مساوی ہین جسکی سمت س؛ ر و ط کے درمیان ہے
اسی طرح سے طاقتین ق اور س جو نقطہ ب پر عمل کرتی ہین
ایک طاقت ی کے مساوی ہین جسکی سمت س اور ق کے
درمیان ہے ٭
ص اور ی کے خطوط کو بڑھاؤ یہان تک کہ نقطہ ج پر ملجاوین
اور ج د ط اور ق کی سمتون کے متوازی کھینچو جو اب کو نقطہ د پر
قطع کرے ٭
ص اور ی کا نقطہ ج پر انتقال کرو اور دونون کو ج د کی سمت
مین اور ایک اور خط کی سمت مین جو نقطہ ج سے اب کی متوازی
کھینچا جائے منفصل کرو ٭
دوسری اجزا مین سے ہر ایک س کے مساوی ہوگا۔ از روے
ایکدوسری کے مخالف سمتون مین عمل کرینگی اور ایک دوسرے کے عمل کو
زائل کر دینگی پہلے اجزا کی حاصل جمع ط+ق کے مساوی
ہوگی ٭
پس یکجانبہ متوازی طاقتون ط اور ق کا حاصل ط+ق ہوگا
اور اسکی سمت ط اور ق کی سمتون کے متوازی ہوگی اور خط
اب کو نقطہ د پر قطع کریگی پس اس حاصل کا عمل نقطہ د
پر فرض کر سکتے ہین ٭
نقطہ د ہم اس طور سے معلوم کر سکتے ہین ۔ مثلث ا د ج

کے ضلعے طاقتون س ط ص کی سمتون کے متوازی ہین

پس بموجب حد (۳۶) کے $\frac{ا د}{د ج} = \frac{س}{ط}$

اسی طرح سے $\frac{د ب}{د ج} = \frac{س}{ق}$

$\therefore \frac{ا د}{د ب} = \frac{ق}{ط}$

پس نقطہ د اب کو ایسے دو حصون مین تقسیم کرتا ہے جو اُن طاقتون سے جو ا اور ب پر عمل کرتی ہین عکس نسبت رکھتی ہین *

فرض کرو کہ اب = آ اور ا د = لا تو $\frac{لا}{آ - لا} = \frac{ق}{ط} \therefore ط لا = ق (آ - لا) \therefore لا = \frac{ق آ}{ط + ق}$

(۷۱) دو متوازی مخالف طاقتوںکے جو ایک جسم مصمت پر عمل کرتی ہین حاصل کی مقدار اور سمت دریافت کرنیکا قاعدہ

فرض کرو کہ دونون مین سے ق بڑی طاقت ہے بموجب عمل دفعہ مذکورہ بالا ہم اس نتیجہ کو پہنچ جاوینگے *

کہ مخالف متوازی طاقتون ط اور ق کا حاصل ق - ط ہے جو ط اور ق کی سمتون کے متوازی ایک ایسے خط مین عمل کرتا ہے جو اب خارجہ کو نقطہ د پر قطع کرتا ہے اسطرح سے کہ

$\frac{ا د}{ب د} = \frac{ق}{ط}$

پس نقطہ د خط ا ب خارجہ کو ایسے دو حصون مین تقسیم کرتا ہے۔ جنکو آپسمین وہ نسبت ہے جو اُن طاقتون کے عکسون کو جو ا اور ب پر عمل کرتی ہین ؛

فرض کرو کہ ا ب = آ اور ا د = لا

تو $\frac{لا}{لا - آ}$ = $\frac{ق}{ط}$ ∴ ط لا = ق (لا - آ)

اِس حد کا نتیجہ پہلے حد سے ہی نکل سکتا ہے اگر ہم ط کی جگہ - ط رکہدین ؛

(۶۲) اگر تین متوازی طاقتین ایک جسم مصمت کو ساکن رکہین تو اُن مین سے کوئی ایک باقی دو طاقتون کے حاصل کے مساوی اور مخالف ہونی چاہئے۔ پس یہ تینون طاقتین ایک سطح مین عمل کرینگی۔ اُن مین سے ایک طاقت باقی دو کے مخالف ہوگی اور اُس کا خط میلان اُن دونون کے درمیان ہوگا اور اُنکے درمیانی فاصلہ کو اُن دونون طاقتون کے عکس نسبت مین تقسیم کریگا۔

(۶۳) ۶۰ اور ۶۱ حد کے متواتر عمل سے ہم کسی قدر متوازی طاقتون کا حاصل دریافت کر سکتے ہین اول دو طاقتون کا حاصل دریافت کرو اور پھر اِس حاصل اور تیسری طاقت کا حاصل دریافت کرو اور علیٰ ہذا القیاس ؛

(۶۴) ایک صورت ایسی ہو سکتی ہے جسمین ہم دو متوازی طاقتون کا حاصل معلوم نہین کر سکتے یعنی جبکہ طاقتین مساوی اور مخالف

ہون (۶۴) حد کا عمل اس صورت مین کارآمد نہین ہو سکتا کیونکہ
اس صورت مین ص اور ی کے خطوط میلان باہم متوازی
ہونگے پس نقاط ج اور د بیدا ہی نہین ہوسکتی *
ایسی دو طاقتون کو جفت کہتے ہین جفت کے باب مین
کئی مفید شکلین ہین مگر ہمین ایک شکل ثابت کرنا اس موقع
پر کافی ہوگا پہلے کچھ ابتدائی حدود درکار ہونگی *

(۶۵) جفت اون دو متوازی طاقتون کو کہتے ہین جو آپسمین مساوی
اور مخالفہ ہون *
بازو جفت دونون طاقتونکی خط تحریک کے عمود دار فاصلہ کو
کہتے ہین *
مقیاس الجفت دونون مساوی طاقتون مین سے ایک اور بازو
کی حاصلضرب کو کہتے ہین یعنے وہ عدد جو طاقت کو تعبیر کرتا ہے اُس عدد
سے جو بازو کو تعبیر کرتا ہے ضرب دیا جاے تو حاصل مقیاس الجفت
کو تعبیر کریگا *

(۶۶) یہ بات معلوم ہو جاویگی کہ جفت کی تاثیر جو کسی جسم پر عمل کرتا ہو
یہ ہوتی ہے کہ اُس جسم کو گردش دیوے اور یہ بات اعلی درجہ
کے جز ثقیل مین ثابت ہے *
یہ گردش ایک خط مستقیم کی گرد ہوتی ہے جو جسم کی ایک نقطہ
سے گزرتا ہے جسکو اُس کا مرکز ثقل کہتے ہین مگر یہ ضرور

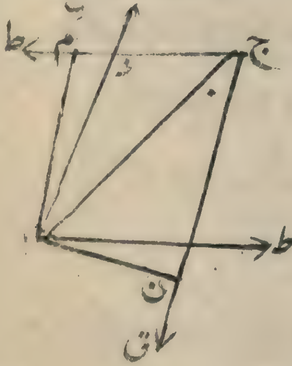
نہین کہ یہ خط جفت کے سطح پر عمود ہو +

(۶۷) دو جفت ایک ہی سطح مین ایک جسم کو مختلف سمتون مین گردش دیسکتے ہین +

مثلاً شکل مندرجہ ذیل مین دو مساوی طاقتون ط اور دو مساوی طاقتون ق کی گردشون کی سمتین مختلف ہین +

فرض کرو کہ تختہ ا ب ج د اپنی ہی سطح مین ایک نقطہ کے گرد گردش کرسکتا ہے جفت ق اور ق تختہ کو اُسی سمت مین گردش دیگا جسمین کہ گھڑیکی سوہان حرکت کرتی ہین مگر جفت ط اور ط اِسکے برخلاف گھماویگا +

جو جفت ایک جسم کو ایک ہی سمت مین گھمانیکی قابلیت رکہتے ہین اُنکو یکجانبہ کہتے ہین اور جو مختلف سمتون مین ہین اُن کو مخالفہ کہتے ہین +



(۶۸) دو مخالف جفت ایک سطح مین ایک جسم کو ساکن رکہینگے اگر اُنکی مقیاس الجفت برابر ہون +

فرض کرو کہ ایک جفت کی ہر ایک طاقت ط ہے اور دوسرے جفت کی ہر ایک طاقت ق ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع فرض کرو جو اِن طاقتون کے خطوط میلان سے بنی -

آم - آد - آن جدا گانہ ج د اور ج ب پر عمود کھینچو +
ہم فرض کر چکے ہین کہ جفتوں کے مقیاس مساوی ہین یعنے

ط × ام = ق × ان

∴ ط/ق = ان/ام = اب/اد

(بموجب شکل ۴ مقالہ ۶)

پس طاقتوں کے متوازی الاضلاع کے بموجب ط اور ق کا حاصل جو نقطہ
ا پر عمل کرتی ہین اج کی سمت مین عمل کریگا +

اسی طرح سے ط اور ق کا حاصل نقطہ ج پر ج ا کی سمت مین
عمل کریگا اور مقدار مین پہلے حاصل کے مساوی ہوگا پس
دونون حاصل ایک دوسرے کو زایل کردینگے

پس دونون جفت ایک دوسری کو زایل کردینگے

چونکہ دو مخالف جفت جنکے مقیاس مساوی ہون اور ایک سطح مین عمل کرتی
ہون آپسمین ساکن رہتی ہین تو دو یکجانبہ جفت جنکے مقیاس
مساوی ہین اور ایک ہی سطح مین عمل کرتی ہون مساوی اثر پیدا
کرینگی +

(۶۹) پچھلی حد کے ثبوت مین ہمنے یہ فرض کر لیا ہے کہ ایک جفت
کی طاقتین دوسری جفت کی طاقتوں کے متوازی نہین ہین
اگر چارون طاقتین متوازی ہون تو ۶۰ اور (۶۱) حد کے
ذریعہ سے دعوی مذکورہ بالا ثابت ہو سکتا ہے یا ہم اسطرح

بھی ثبوت کہہ سکتے ہین +

فرض کرو کہ جفت مخالف ہین اور سب طاقتین متوازی ہین ایک اور جفت اوسی سطح مین فرض کرو۔ جسکا مقیاس القوۃ پہلے دونون جفتون کی مقیاس القوۃ کے مساوی ہو اور اوسکی طاقتین پہلی چار ہون طاقتون کے متوازی نہ ہون تو (۶۸) حد کے بموجب یہ ثابت ہوگا کہ یہ جفت باقی دو جفتون مین سے ایک کے ساتھ ساکن رہیگا اور دوسری کے مساوی ہوگا پس دونون اصل جفت ایک دوسرے کو ساکن رکھینگے +

پس ہمین معلوم ہوتا ہے کہ ایکہی سطح مین دو یکجانبہ جفت جنکے مقیاس القوۃ آپسمین مساوی ہون ایک جفت یکجانبہ کے مساوی ہونگے جو اوسی سطح مین ہوگا اور جسکا مقیاس القوۃ دوچند ہوگا +

اور اسی طرح ثابت ہوسکتا ہے کہ کسی قدر یکجانبہ جفت جو ایک ہی سطح مین عمل کرتی ہون ایک جفت کے مساوی ہونگی جو اسی سطح مین عمل کریگا اور جسکا مقیاس القوۃ ان سب جفتون کے مقیاسون کے حاصلجمع کے برابر ہوگا

اگر ایک سطح مین کسیقدر جفت عمل کرتی ہون اور ان مین سے بعض ایک قسم کی اور بعض مخالف قسم کی ہون تو وہ سب

ایک جفت کے مساوی ہونگی جو اُسی سطح مین عمل کرے گا اور
جسکا مقیاس دونون قسمون کے مقیاسونکے مجموعون کے حاصل تفریق
کے برابر ہوگا اور اُن جفتون کے قسم مین سے ہوگا جنکے مقیاسون
کا مجموعہ بڑا ہے *

(۱۷) ایک مفرد طاقت اور ایک جفت جو ایک ہی سطح مین عمل کرتی
ہون برابر ہونگے اُسی مفرد طاقت کے جسکی سمت اُسکی اصل سمت
کے متوازی ہوگی *

فرض کرو کہ ط ایک مفرد طاقت ہے اور ق ایک جفت کی
ہر ایک طاقت ہے *

اگر سب طاقتونکی سمتین متوازی ہون تو ط جفت کی یکجا نبہ
طاقت کے ساتھ ملکر حاصل ط + ق اپنی سمت کے متوازی پیدا
کریگی۔ پھر ط + ق جفت کی دوسری طاقت ق سے ملکے حاصل
ط پیدا کرے گا۔ جو اصل طاقت ط کے متوازی اور ہم سمت
ہوگا *

اگر تمام طاقتونکی سمتین متوازی نہین ہین۔ تو فرض کرو کہ
وہ نقطہ ہے جسپر ط کا خط میلان جفت کی ایک طاقت ق کی
خط میلان کو قطع کرتا ہے ط اور اس ق کا حاصل معلوم کرو
اور اِسے ر سے تعبیر کرو۔ فرض کرو کہ ب وہ نقطہ ہے
جسپر ر کا خط میلان جفت کے دوسری طاقت ق کے

خط میلان کو قطع کرتا ہے

فرض کرو کہ ر اس نقطہ پر عمل کرتا ہے ر کو اُسکی اجزار ط اور ق مین منفصل کرو تو دو طاقتین ق و ق آپسمین زائل ہوجائینگے اور باقی طاقت ط رہیگی جو نقطہ ب پر اپنی اصلی سمت کے متوازی عمل کریگی *

سوالات نمبر ۴

(۱) اب ج د ایک مربع ہی ایک ۳ پونڈ کی طاقت ا سے ب کی سمت مین اور ایک طاقت ۴ پونڈ کی ب سے ج کی سمت مین عمل کرتی ہی اور ایک طاقت ۶ پونڈ کی د سے ج کی سمت مین عمل کرتی ہے اور ایک طاقت ۵ پونڈ کی آ سے د کی سمت عمل کرتی ہی تو حاصل کی مقدار اور سمت معلوم کرو *

(۲) دو آدمی (۱۵۲) پونڈ کی وزن کو ایک بانس پر اُٹھا کر لے جاتے ہین جو اُن کے کندھون پر رکھا ہوا ہے بوجہ غلطی وصلہ پر ایک آدمی سی ہی اُسے کتنے فاصلہ پر دوسری آدمی سے ہے تو بتاو ہر ایک آدمی کو کتنا کتنا بوجہ سہارنا پڑتا ہے بانس کا وزن تصور نہین کیا گیا *

(۳) ایک آدمی دو وزن کو اُٹھاتا ہی جو ۴۰ انچ طول والی لکڑی کے سرے سے لٹکتی ہین اور وہ لکڑی اُسکے کندھے پر رکھی

ہوئی ہی ایک وزن دوسری وزن کے ۲/۳ کے برابر
ہے تو مقام بر دغت معلوم کرو لکڑی کا وزن تصور نہین کیا
گیا +

(۴) اب ج ایک مثلث ہے اور و کوئی نقطہ اُسکے اندر ہے
متوازی یکجانبہ طاقتین ط اور ق ا اور ب پر عمل کرتی ہین
اس طرح کہ ط : ق :: رقبہ مثلث ب و ج : رقبہ مثلث
ا و ج تو ثابت کرو کہ حاصل اُس نقطہ پر عمل کرتا ہے جہان ج و
خط خارج شدہ اب کو قطع کرتا ہے +

(۵) اگر مثال ۴ مین نقطہ و مثلث سی باہر ہو اور طاقتین ط اور ق
اُسی نسبت سی عمل کرین جیسی چوتھی سوال مین تو ثابت کرو کہ
حاصل پہلے سوال کے بموجب عمل کری گا۔ بشرطیکہ ط اور ق
یکجانبہ ہون اگر ج و اور اب اب پر ہی قطع کرین یا مخالفہ
ہون اگر ج و اور اب اب خارجہ پر قطع کرین +

(۶) اب ج ایک مثلث ہی اور و اُسکے اندر کوئی نقطہ ہی ا ب
و ج پر متوازی یکجانبہ طاقتین عمل کرتی ہین جو جداگانہ مثلثون ب و ج
ج و ا ا و ب کے رقبون کے متناسب ہین تو ثابت کرو کہ حاصل
نقطہ و پر عمل کرتا ہے +

(۷) اگر نقطہ و مثلث کے باہر لیا جاوی اور طاقتین اُسی نسبت
سے عمل کرین جیسے مثال ۶ مین مگر تینون طاقتون مین سے

کوئی ایک طاقت باقی دو طاقتون کے مخالف ہو تو ثابت کرو کہ
حاصل نقطہ و پر عمل کریگا ۔

(۸) ط اور ق متوازی طاقتین یکجانبہ ہین اور ایک متوازی مخالف
طاقت (ط + ق) اُسی سطح مین پہلے دونون طاقتون
سے ا اور ب عمود وار فاصلون پر اور اون دونون طاقتون
کے درمیان عمل کرتی ہے تو اُس جفت کا مقیاس القوة
دریافت کرو جو اُن تین طاقتون سے حاصل ہوگا

(۹) متوازی یکجانبہ طاقتین جنمین سے ہر ایک ط کی مساوی
ہے ایک مربع کی تین زاویون پر جداگانہ عمل کرتی ہین اور مربع
پر عمود وار ہین چوتھی زاویہ پر ایک ایسی طاقت عمل کرتی ہے
کہ سب طاقتین ملکر ایک جفت بن جاتا ہے تو اس جفت کا مقیاس القوة
معلوم کرو ۔

باب پنجم مقیاس القوتون کے بیان مین

(۴۲) اگر کسی طاقت کی خط تحریک پر کسی نقطہ سے عمود اگرایا جاوے تو اُس طاقت اور عمود کا حاصل ضرب اُس نقطہ کے لحاظ سے اُس طاقت کی مقیاس القوۃ ہوگی +

مثلاً فرض کرو کہ اب ایک خط تحریک کسی طاقت کا ہے اور و کوی نقطہ ہے اُس سے وم اب پر عمود گرایا گیا ہے تو اگر ط طاقت کو تعبیر کرے تو مقیاس القوۃ بلحاظ نقطہ و کے ط × وم ہوگا +

ب ا م و

پس کسی طاقت کا مقیاس نایل نہین ہوگا سوای اُس حالت کی جبکہ وہ جسکے گرد مقیاس لیجاوین اُس طاقت کے خط تحریک مین واقع ہو +

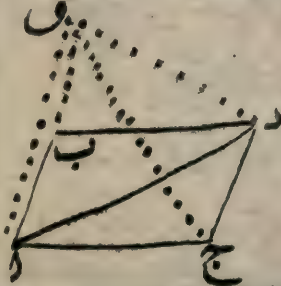
(۴۳) فرض کرو کہ وم ایک سلاخ ہے جو و کے گرد کاغذ کی سطح مین گھوم سکتی ہے - اگر ایک طاقت م پر اب کے سمت مین عمل کرے تو سلاخ مذکور کو و کے گرد اُسی سمت مین گھمانیکی قابلیت رکھیگی جیسے گھڑیکی سویان گھومتی ہین - اگر طاقت ب ا کی سمت مین عمل کرتی ہے تو وہ سلاخ مذکور کو نقطہ و کے گرد اُسکے مخالف سمت مین گھمانے کی قابلیت رکھیگی اِن دو قسمون کی مقیاسون مین تمیز کرنا ضرور ہے ایک قسم کی مقیاس القوۃ کو ہم مثبت کہینگے

اور دوسرے قسم کو منفی۔ یہ کچھ ضرور نہیں کہ ہم کس قسم کو مثبت یا منفی کہیں لیکن جب ایک دفعہ تمیز کر لیں تو کل عمل میں اُس کا خیال رکھیں *

(۴۷) چونکہ ایک مثلث کا رقبہ اُسکے قاعدہ اور عمود کے حاصلضرب کے نصف کے مساوی ہوتا ہے اسلئے ہم کسی طاقت کی مقیاس القوۃ کو ایک مثلث کے دوچند رقبہ سے تعبیر کر سکتے ہیں جسکا قاعدہ وہ خط ہو جو اُس طاقت کو تعبیر کرتا ہے اور جسکا نقطہ راس وہ نقطہ ہو جسکے گرد مقیاس القوۃ لئی جاویں - اب ہم مقیاسوں کے باب میں ایک نہایت مفید شکل بیان کرینگے *

(۴۸) اگر دو طاقتوں کے مقیاس القوۃ اُن طاقتوں کی سطح میں کسی نقطہ کے گرد لئی جاویں تو اُن مقیاسوں کی جبری حاصلجمع اُسی نقطہ کے گرد اُنکے حاصل کی مقیاس القوۃ کے برابر ہوگی *

فرض کرو کہ اب اور اج دو طاقتوں کو تعبیر کرتے ہیں متوازی الاضلاع ابجد پوری کرو اور قطر اد کھینچو جو حاصل کو تعبیر کریگا *



فرض کرو کہ و وہ نقطہ ہے جسکے گرد مقیاس القوۃ لئے گئے ہیں و ا و ب و ج اور و د کو ملاؤ اول

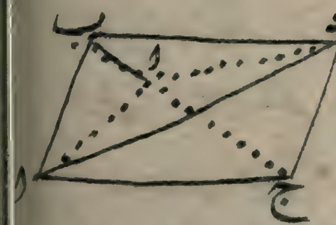
فرض کرو کہ نقطہ و زاویہ ب اج اور اُسکے مقابل کے
زاویہ کے باہر ہے +

مثلث اوج = مثلث اب و + مثلث وب و کیونکہ مثلث اوج
کا قاعدہ اج ہے اور مثلثین اب د اور وب د مساوی
قاعدہ ب د پر واقع ہین اور نقطہ و سے اج پر عمود نقاط
ا اور د سے ب د پر عمودون کے مجموعے کے مساوی ہی +

پس مثلث اوج = مثلث اب د + مثلث وب د = مثلث
ا د و ـ مثلث ادب

اِسلئے مثلث اوج + مثلث اوب = مثلث اوداب
دونون طرف کو ۲ سے ضرب کرو ∴ طاقت اج کا مقیاس القوۃ
+ طاقت اب کا مقیاس القوۃ مساوی ہے اد کی مقیاس
القوۃ کے +

دوہم فرض کرو کہ نقطہ و زاویہ ب اج یا اُسکے مقابل کے
زاویہ کے اندر واقع ہوتا ہے +



مثلث اوج مثلثون اب د
اور وب د کے حاصل تفریق کے
مساوی ہی کیونکہ مثلث اوج
قاعدہ اج پر واقع ہے
اور مثلثین اب د اور وب د

مساوی قاعدے ب د پر واقع ہین اور نقطہ د سے آج پر عمود نقاط آ اور و سے ب د پر عمودونکی حاصل تفریق کے برابر ہے ÷

پس مثلث آوج = مثلث آ ب د - مثلث و ب د

= مثلث آوب + مثلث او د

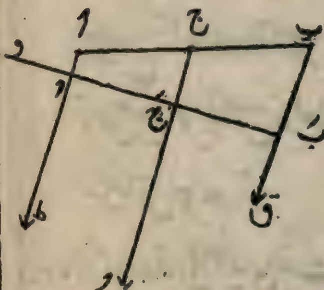
پس مثلث آوج - مثلث او ب = مثلث آود

دونون طرفون کو ۲ سے ضرب دو تو اج کا مقیاس القوہ آب کا مقیاس القوۃ

= آد کی مقیاس القوۃ کی

اج و اب کے مقیاس القوۃ نقطہ و کے گرد اس صورت مین مختلف قسمون کے ہین پس حاصل کا مقیاس القوہ ہمیشہ اسکی اجزار کی مقیاس القوتونکی جبریہ حاصلجمع کے برابر ہے ÷

(۶۲) پچھلی حد صرف اس صورت کیواسطے ہے جسمین طاقتون کے خطوط تحریک ملتے ہین اور یہان ہم ثابت کرتے ہین کہ متوازی طاقتون کی حالت مین بھی یہ دعویٰ درست ہے ÷



فرض کرو کہ ط اور ق دو متوازی طاقتین یکجانب ہین جو نقاط ا و ب پر عمل کرتی ہین اور ح ان کا حاصل ہے جو اب کو ج پر قطع کرتا ہے۔ کوئی نقطہ و فرض

کرو کہ جو طاقتون کے خطوط میلان کے درمیان مین نہ ہو اور نقطہ و سے ط ق اور ح کے خطوط تحریک پر عمود ڈالو جو انہین اب اور ج پر قطع کریگا +

اب ط/ق = بَ جَ / جَ اَ بموجب حد (۶۰) = جَ بَ / جَ اَ بموجب (ش م ۲)

∴ ط × جَ اَ = ق × جَ بَ

اور ط × و اَ + ق × و بَ = ط (و جَ - جَ اَ) + ق + (و جَ + جَ بَ) = (ط + ق) و جَ - ط × جَ اَ + ق × جَ بَ

= (ط + ق) × و ج = خ + و جَ یہی ثابت کرنا تھا +

اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ جب نقطہ و ط اور ق کی خطوط تحریک کے درمیان واقع ہو تو ح کا مقیاس القوۃ ط اور ق کی مقیاس القوۃ کے عددی حاصل تفریق کے مساوی ہوگا +

پس دو مساوی یکجا نبہ طاقتون کی حالت مین حاصل کا مقیاس القوۃ ہمیشہ اسکی اجزا کے مقیاسون کے جبریہ حاصل الجمع کے برابر ہوتا ہے

اسی طرح سے یہ تشکل مخالف متوازی طاقتون کے واسطے بھی ثابت ہو سکتی ہے +

(۷۷) اگر دونون طاقتین جفت ہون تو انکی مقیاسون کی جبریہ حاصل الجمع جفت کی سطح مین کسی نقطہ کے گرد غیر متبدل

ہوگی ✢

اگر نقطہ طاقتون کی خطوط تحریک کے درمیان ہو تو دونون طاقتون کے مقیاس القوۃ ایک ہی قسم کی ہونگی اور انکی حاصل جمع برابر ہوگی ایک طاقت اور دونون کے درمیانی عمود وار فاصلہ کے حاصل ضرب کے ✢

اگر نقطہ طاقتون کی خطوط تحریک کی درمیان ہو تو دونون طاقتون کی مقیاس القوۃ مخالف قسم کے ہونگے اور اُن کا حاصل تفریق عدداً برابر ہوگا ایک طاقت اور اُن دونون کے درمیانی عمود وار فاصلہ کے حاصل ضرب کے ✢

پس ہر ایک صورت مین جفت کی طاقتون کے مقیاس القوتون کے جبریہ حاصل جمع اُسی سطح مین کسی نقطہ کے گرد برابر ہوتی ہے ایک طاقت اور اُن دونون کے درمیانی عمود وار فاصلہ کی حاصل ضرب کے یعنی مقیاس القوۃ جفت کے ۔ دیکھو حد (۶۵)

(۷) جب دو طاقتین ایک ہی سطح مین عمل کرتی ہون تو ان تین صورتون مین سے ایک ضرور ہونی چاہیے یعنی یا تو کل طاقتین ساکن ہونگی پس اُن کا حاصل صفر ہوگا ۔ یا اُن کا ایک حاصل ہوگا یا وہ جفت ہونگی ۔ اول حالت مین طاقتون کی ۔ مقیاس القوتون کی جبریہ حاصل جمع اُس سطح کے کسی نقطہ کے گرد ہمیشہ صفر کے برابر ہوگی اور دوسری حالت مین اُس صورت مین صفر کے برابر

ہوگی جبکہ وہ نقطہ جسکے گرد مقیاس القوۃ لی گئی ہین حاصل
کے خط تحریک پر واقع ہو تیسری صورت ہین کبھی صفر کے برا
نہین ہوگی *

(۷۹) (۷۵) حد کا نتیجہ اُس صورت مین بھی عمل مین آسکتا ہی جبکہ طاقتو
کی تعداد جو ایک نقطہ پر ایک سطح مین عمل کرتی ہین چاہی کچھ ہی ہو
اول دو طاقتون کو لو تو اُنکے مقیاس القوۃ کی جبری حاصل جمع کسی
نقطہ کے گرد اُنکے حاصل کی مقیاس القوۃ کی برابر ہوگی ان دو
طاقتون کی جگہہ اُن کے حاصل کو رکھو اور پھر اس حاصل اور تیسری
طاقت کو لیکر (۷۵) حد کا عمل در آمد کرو۔ اور علی ہذا القیاس

(۸۰) اسی طرح سے (۶۳) حد کی مدد سے ہم (۷۶) حد کو اُس حالت
تک پھیلا سکتے ہین۔ جبکہ متوازی طاقتون کی تعداد جو ایکہی سطح
مین عمل کرتی ہون خواہ کتنی ہی

(۸۱) اگر ایک سطح مین ایک ذرہ پر کئی طاقتین عمل کرین تو وہ یا توسا کن
ہونگی یا اون کا ایک حاصل ہوگا اول حالت مین اُن کے مقیاس
القوتونکی حاصل جمع اُسی سطح مین کسی نقطہ کے گرد ہمیشہ معدوم
ہوجاتی ہے دوسری صورت مین صرف اُس حالت مین
معدوم ہوتی ہے جبکہ نقطہ حاصل کی خط تحریک پر ہو *

(۸۲) پس ہم (۷۵) حد کی بجائے مفصلہ ذیل بھی استعمال کرسکتے
ہین *

جو طاقتین ایک سطح مین ایک ذرہ پر عمل کرتی ہون وہ ساکن ہونگی اگر انکی مقیاس القوتونکی جبریہ حاصلجمع اُسی سطح مین کسی دو نقطون کی گرد معدوم ہو جو کہ اُس ذرہ مین سے گزرتی ہوئی کسی خط مستقیم پر واقع نہ ہون ٭

برعکس اسکے اگر طاقتین ساکن ہون تو اُن کے مقیاس القوتون کے جبریہ حاصلجمع اِس سطح مین کسی نقطہ کے گرد معدوم ہو جائیگی ٭

مثالات باب پنجم

(۱) کسی دایرہ کے محیط مین پ و ق دو نقاط غیر متبدل ہین ق ا و ق ب دو عمود وار خطوط دایرہ مین خط پ ق کی مخالف سمتون مین کھینچی گئی ہین اگر خطوط ق ا و ق ب طاقتون کو تعبیر کرین تو اُنکے مقیاسون کے حاصل تفریق بہ لحاظ پ کی غیر متبدل ہوگی ٭

(۲) اگر دو یا زیادہ طاقتین ایک سطح مین ایک نقطہ پر عمل کرین تو اُن کے مقیاسون کی جبریہ حاصلجمع اُسی سطح مین کسی نقطہ کے گرد غیر متبدل رہیگی جبکہ نقطہ ایک خاص خط کے متوازی حرکت کرے ٭

(۳) اگر ایک ہی سطح مین ایک نقطہ پر عمل کرنیوالی کئی طاقتون کے مقیاسون کے جبریہ حاصلجمع اُسی سطح کے دو نقطون کے گرد غیر متبدل ہے

تو ثابت کرو کہ جو خط ان دو نقطون کو وصل کرتا ہے حاصل
کے خط تحریک کے متوازی ہوگا

(۴) ا ب ج ایک مثلث ہے د تی ف جدا گانہ نقاط ا و ب و ج کے
مقابل اضلاع کے نقاط تنصیف ہین تو نقاط ا و ب و ج کے
گرد مقیاس لیکر ثابت کرو کہ خطوط ا د و ب ی و ج ف سے
تعبیر شدہ طاقتین ساکن رہینگی *

(۵) کسی مثلث کے نقاط زوایا سے مقابل کے اضلاع پر عمود کھینچے
گئے ہین اور طاقتون کو تعبیر کرتے ہین تو نقاط زوایا کی گرد
مقیاس لیکر ثابت کرو کہ طاقتین ساکن نہین ہونگی الا کہ مثلث
مساوی الاضلاع ہو *

(۶) کسی مثلث کے نقاط زوایا پر اُن سمتون مین جو اُن نقاط سے
مقابل کی اضلاع پر کھینچی گئی ہین طاقتین عمل کرتی ہین اور ہر ایک
طاقت متناسب اُس ضلع کے ہے جس پر کہ وہ عمود ہے نقاط
زوایا کے گرد مقیاس لیکر ثابت کرو کہ طاقتین ساکن
رہینگی *

(۷) ا ب ج ایک مثلث ہے اور و اس مین کوئی نقطہ ہے ا و ب و ا و ج و
خارج ہو کر اضلاع مقابل کو نقاط ہ س ک پر قطع کرتی ہین
تو ثابت کرو کہ طاقتین جو ا ہ ب س اور ج ک سے تعبیر
تعبیر کیجائین ساکن نہین ہونگی جبتک ہ س و ک اضلاع

کے نقاط تنصیف جداگانہ نہون ٭

(۸) اب ج ایک مثلث ہی اور وس مین کوئی نقطہ ہی جس سے اضلاع کے متوازی اور اضلاع سے ملا دو خطوط کھینچی گئی ہین تو ثابت کرو کہ طاقتین جو ان خطوط سے نعبیہ کی جاوین ساکن نہین رہنیگی جبتک کہ ہر ایک خط کی نقطہ وہ پر تنصیف نہ ہو ٭

باب ششم

اون طاقتون کے بیان مین جو ایک ہی سطح مین عمل کرتی ہین

(۸۳) اس باب مین ایسی طاقتون کے نظام کی شرایط سکون بیان کیجاینگی جو ایک ہی سطح مین ایک جسم مصمت پر عمل کرتی ہون *

(۸۴) اگر ایک ہی جسم مصمت پر ایک ہی سطح مین کئی طاقتین عمل کرتی ہون اور ساکن نہ ہون تو وہ یا تو ایک مفرد حاصل کے برابر ہونگی یا ایک جفت کے *

نظام کی کوئی دو طاقتین لو اور اُن کا حاصل معلوم کرو پھر اس حاصل اور ایک اور طاقت کو ملاکر حاصل معلوم کرو اسی طرح سے عمل کرتے جاؤ تو آخر مین یہ طاقتین یا تو ایک مفرد حاصل کے برابر ہونگی یا ایک جفت کے ورنہ اس نظام کی ایک طاقت باقی اور طاقتون کی حاصل کے مساوی اور مخالف ہوگی پس تمام طاقتین ساکن ہونگی *

(۸۵) اگر کسیقدر طاقتین ایک سطح مین ایک جسم پر عمل کرتی ہون اور ایک خاص حاصل کے مساوی ہون تو حاصل کا مقیاس القوۃ اُسی سطح مین کسی نقطہ کے گرد طاقتون کے مقیاسون کے جبریہ حاصلجمع کے برابر ہوگا یہ شکل ۵۷ و ۶۲ حد کے متواتر

عمل سے ثابت ہو سکتی ہے +
کوئی دو طاقتین لو تو اُنکی حاصل کا مقیاس القوۃ اُسی سطح مین کسی نقطہ کے گرد ان دونون طاقتون کے مقیاسون کی حاصلجمع جبریہ کے برابر ہوگا پھر اس حاصل کو ایک اور طاقت کے ساتھ لو تو اُنکی حاصل کا مقیاس القوۃ اُن اجزا کی مقیاسون کے حاصلجمع جبریہ کے برابر ہوگا یعنی طاقتونکے نظام کے تین طاقتون کی مقیاسون کی حاصلجمع جبریہ کے برابر ہوگا اور علی ہذا القیاس +
پس کتنی ہی طاقتون کے مقیاس القوتون کے جبریہ حاصلجمع اوسی سطح کی کسی نقطہ کے گرد صفر کے برابر نہین ہوگی جبتک کہ وہ نقطہ جسکے گرد مقیاس القوۃ لیئے جاتے ہین حاصل کے خط تحریک پر نہ ہو +
(۸۶) اگر کسی قدر طاقتون کا نظام ایک جسم مصمت پر ایک ہی سطح مین عمل کرے اور ساکن رہے تو اُنکے مقیاس القوتون کی حاصلجمع جبریہ اُسی سطح کی کسی نقطہ کے گرد صفر کے برابر ہوگی +
کیونکہ جب طاقتون کا نظام ساکن ہے تو اُسکی ایک طاقت باقی اور طاقتونکے حاصل کے مساوی اور مخالف ہوگی - پس ایک طاقت کا مقیاس القوۃ اُسی سطح کی کسی نقطہ کے گرد باقی اور طاقتون کے حاصل کی مقیاس القوۃ کے مساوی اور مخالف ہوگا - دیکھو دفعہ
۸۷ - پس بموجب حد ۸۵ کے ایک طاقت کا مقیاس القوۃ باقی

اور طاقتونکے مقیاس القوتون کی حاصلجمع جبریہ کے مساوی اور مخالف ہوگا - پس کل طاقتونکے مقیاسونکے جبریہ حاصلجمع صفر کے برابر ہوگا *

(۸۷) اگر طاقتون کا نظام جو ایک ہی سطح مین ایک جسم مصمت پر عمل کرتی ہین ایک جفت کے برابر ہو تو طاقتون کی مقیاس القوتون کے حاصلجمع جبریہ اُسی سطح کی کسی نقطہ گرد کسی عدد معین کی برابر ہوگی - جو صفر نہین ہوگا - بر عکس اسکے اگر طاقتونکے مقیاسون کی جبریہ حاصلجمع اُسی سطح کے کسی نقطہ گرد ایک عدد معین کی برابر ہو جو صفر نہین ہے تو وہ طاقتین ایک جفت کی برابر ہونگی *

یہ نتایج ۸۴ - ۸۵ ، ۸۶ حد سے نکلتی ہین *

(۸۸) اگر طاقتون کا ایک نظام جو ایک ہی سطح مین ایک جسم مصمت پر عمل کرتا ہو تو وہ ساکن ہوگا - بشرطیکہ طاقتونکے مقیاسون کی جبریہ حاصلجمع اُسی سطح کی جداگانہ تین نقطونکے گرد جو ایک خط مستقیم مین واقع نہین ہین زایل ہو جاے *

کیونکہ اگر طاقتون کا نظام ساکن نہین ہوگا تو وہ یا تو ایک مفرد حاصل برابر ہوگا یا ایک جفت کی *

مگر اس صورت مین طاقتون کا نظام جفت کے برابر نہین ہو سکتا کیونکہ اس صورت مین مقیاس القوتون کی حاصلجمع جبریہ اُسی سطح کے کسی نقطہ کے گرد صفر کی برابر نہین ہو سکتی اور نہ طاقتون کا

اور نہ طاقتون کا نظام ایک مفرد حاصل کے برابر ہو سکتا ہی - کیونکہ
اِس صورت مین متقابس القوتون کی حاصلجمع صرف اُن نقاط
کے لحاظ سے جو حاصل کے خط تحریک پر ہون برابر صفر کے
ہو گی ✤

پس ثابت ہوا کہ طاقتون کا نظام ساکن ہونا چاہیے ✤

(۸۹) حد بالا مین اُن طاقتون کے نظام کی جو ایک سطح مین ایک جسم پر
عمل کرتی ہون سکونکی شرایط بیان ہوئی ہین اگر یہ شرایط
پوری ہو جائین تو جسم ساکن ہو گا یعنی سکون کے واسطے یہ شرایط
سکون کے لئے ضروری ہین کیونکہ حد ۸۶ مین ثابت ہو گیا ہی
کہ اگر حالت سکون ہو تو یہ شرطین پوری ہو جانی چاہئین ✤
حد آئندہ مین ہم سکونکی اِن شرایط کو ایک اور طرح بیان

(۹۰) - اگر طاقتون کا کوئی نظام جو ایک سطح مین ایک جسم مصمت
پر عمل کرتا ہے ساکن ہو تو اُن طاقتون کے حاصلجمع جبریہ
جو کسی خط معین کے متوازی منفصل کئے جاوین صفر کے
برابر ہو گی ✤

کیونکہ جب طاقتون کا نظام ساکن ہی تو اُن مین سے ایک طاقت
باقی اور طاقتون کے حاصل کے مساوی اور مخالف ہو گی پس اُس
ایک طاقت کا جزو منفصلہ متوازی کے خط معین کی باقی
اور طاقتون کی اجزاء منفصلہ کے اُس خط معین کے متوازی

حاصلجمع کے برابر ہوگا - دیکھو عدد ۴۴ - ۶۲ پس اِن طاقتون کی حاصلجمع جبریہ جو ایک خط مستقیم کے متوازی ہوتی ہین صفر کے برابر ہوگی ⁂

(۹۱) طاقتون کا ایک نظام جو ایک ہی سطح مین ایک جسم مصمت پہ عمل کرتا ہو ساکن ہوگا بشرطیکہ اُنکی مقیاس القوتون کے حاصلجمع جبریہ اُسی سطح کے کسی دو نقطون کے گرد صفر کے برابر ہو اور اُن طاقتون کی اجزاء منفصلہ کی حاصلجمع جبریہ جو کہ اُن دونون نقاط کے خط درمیانی کے متوازی منفصلہ کی جاوین برابر صفر کے ہو ⁂

کیونکہ اگر طاقتون کا نظام ساکن نہو تو وہ یا تو ایک مفرد حاصل کے برابر ہوگا یا ایک جفت کی مگر اس صورت مین طاقتون کا نظام جفت کے برابر نہین ہوسکتا کیونکہ تب تو اُن کی مقیاس القوتونکی حاصلجمع اُسی سطح مین کسی نقطہ کے گرد صفر کے برابر نہین ہوسکتی ⁂

اور نہ طاقتون کا نظام کسی مفرد حاصل کی برابر ہوسکتا ہے کیونکہ اس صورت مین مقیاس القوتون کی حاصلجمع جبریہ صرف اِن نقاط کے لحاظ سے جو اُنکی حاصل کی خط میلان مین ہون برابر صفر کے ہوگی پس حاصل اُس خط کی سمت مین عمل کریگا جو دونون نقاط مفروضہ کو وصل کرتا ہے مگر یہ بات ہم فرض

کر چکے ہین کہ اِن طاقتونکے اجزاء منفصلہ کی حاصلجمع جبریہ اسی خط کے متوازی صفر
کی برابر ہے پس اس خط کی سمت مین کوی حاصل عمل نہین کر سکتا ۔ دیکہو عدد
۱۴ اور ۵۴ ۔

ین طاقتونکا نظام ساکن ہونا چاہیئے ۔

ر ۹۳ م بہ پچہلی دفعہ مین ہم نے طاقتونکی بابت یہہ کہا ہے کہ وی اُس خط
ن متوازی منفصل کیجاوین جو دونون نقاط مفروضہ کو وصل کرتا ہے اس سے
ہہ مراد ہے کہ ہر ایک طاقت دو اجزاء مین منفصل ہوئی ایک اِس خط کے
متوازی اور دوسرے کسی اور خط کے متوازی یہہ ضرور نہین کہ دوسرا خط اول
ط پر عمود وار واقع ہو اگرچہ آسانی کے لیئے ہم یہہ فرض کر سکتے ہین ۔
ہ بالا مین ہمنے ثابت کیا ہے کہ سکون کی شرائط مذکورہ بالا کافی ہین عدد
۹۰ اور ۹۰ سے واضح ہوگا کہ یہہ شرطین ضروری ہین ۔
علاوہ اسکے ہم طاقتونکے نظام کے شرائط سکون کو جو کہ ایک ہی سطح مین ایک
جسم پر عمل کرتے ہین ایک اور طرح بہی بیان کر سکتے ہین ۔
۲ ۹۴ م اگر طاقتونکا نظام ایک سطح مین ایک جسم پر عمل کرتا ہو تو ساکن ہوگا
شرطیکہ اِن طاقتون کے اجزاء منفصلہ کی حاصلجمع جبریہ متوازی دو خطوط
مفروضہ متقاطع کے اُسی سطح مین صفر کے برابر ہو اور اس سطح کی کسی نقطہ
کے گرد اِن کے مقیاس القوتون کے حاصلجمع بہی صفر کے برابر ہو ۔
یونکہ اگر طاقتون کا نظام ساکن نہ ہو تو وہ یا تو ایک مفرد حاصل کے برابر ہوگا یا
ایک جفت کے ۔

مگر اِس صورت مین جفت کے برابر نہین ہو سکتا کیونکہ اِس صورت مین مقیاس القوت
کی حاصلجمع اُس سطح کے کسی نقطہ کے گرد صفر کے برابر نہین ہو سکتی +
ورنہ ایک مفرد حاصلکے برابر ہو سکتا ہی کیونکہ ہم فرض کر چکے ہین کہ اِن طاقتون
کے اجزا و منفصلہ کی حاصلجمع متوازی دو خطوط مفروضہ کی صفر کے برابر ہے
اِسلیئے اُنکی حاصلکا جزو منفصلہ بھی جو اِن دو خطوط کے متوازی ہوگا صفر
کے برابر ہوگا پس اِن کا حاصل معدوم ہوگا (دیکھو حد ۸۴ اور ۸۲)
پس طاقتون کا نظام ساکن ہوگا۔

(۹۴) حد بالا مین یہ بات ضرور نہین ہی کہ دونون خط مفروضہ باہم عمود
ہون اگرچہ آسانی کے لئے ہم اُن کو اسیطرح فرض کر سکتے ہین۔
حد مذکورہ بالا مین ہمنے ثابت کیا ہے کہ شرائط سکون جو اُس حد مین بیان
ہوئے کافی ہین اور حدود ۸۶ و ۹۰ سے واضح ہوگا کہ شرائط مذکور
ضروری ہین +

اَب ہمنے طاقتون کے نظام کے شرائط کے جو ایک سطح مین ایک
جسم پر عمل کرتی ہون تین صورتین بیان کی ہین (دیکھو حدود ۸۸
اور ۹۱ و ۹۳) +
آخری صورت عموماً نہایت کارآمد ہوتی ہے +

(۹۵) حدود مذکورہ بالا ایسی طاقتون کے نظام سے متعلق ہین جو
ایک جسم پر ایک سطح مین عمل کرتی ہون وہ خاص صورت جس مین
طاقتین متوازی ہون علیحدہ توضیح کے قابل ہے کیونکہ اِس صورت

ہین ان عناصر شرائط سکون ہین سے بعضون ہین بہت سا اختصار ہو جائے گا چنانچہ نتائج منفصلہ ذیل ہمین حاصل ہوتے ہین ؞

متوازی طاقتون کا کوئی نظام جو ایک ھی سطح ہین ایک جسم پر عمل کرتا ہو اگر ساکن نہ ہو تو ایک مفرد حاصل کے برابر ہوگا جو اُن طاقتون کے متوازی عمل کرے گا یا ایک جفت کے برابر ہوگا۔ (دیکھو حدود ۳۶ و ۸۴ ؞

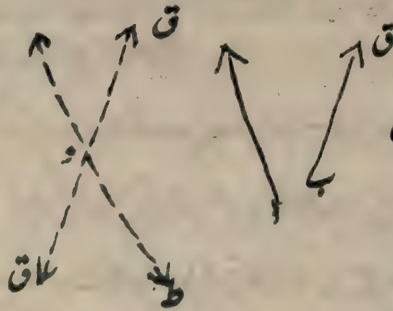
متوازی طاقتون کا کوئی نظام جو ایک ہی سطح ہین ایک جسم مصمت پر عمل کرتا ہو ساکن ہوگا بشرطیکہ طاقتون کے مقیاس القوتون کی حاصل جمع جبریہ اُس سطح کے دو نقاط کے گرد جو طاقتون کی سمت کے متوازی خط مین واقعہ نہ ہون صفر کے برابر ہو (دیکھو حد ۸۸)

متوازی طاقتون کا نظام جو ایک سطح ہین ایک جسم پر عمل کرتا ہو ساکن ہوگا بشرطیکہ طاقتون کی حاصل جمع جبریہ صفر کے برابر ہو اور اُن کے مقیاس القوتون کی حاصل جمع جبریہ بھی اوس سطح کے کسی نقطہ کے گرد صفر کے برابر ہو دیکھو حدود ۹ و ۹۳ -

۹۶) اسباب کے اکثر نتائج بہ ۹ حد کے دعوی پر منحصر ہین اور چونکہ اوس حد کے دلیل بالکل قابل اطمینان ہے لیکن ایک اور ثبوت بھی

دیا جا سکتا ہے اسلیئے ہم آیندہ مدین ایک دعوی کا ثبوت کرتے ہیں
جسمین جلد ۵۰ کی دعوی کا ثبوت بھی شامل ہے ۔
(۷۹) طاقتون کا کوی نظام جو ایک سطح مین ایک جسم مصمت پر عمل
کرتا ہو ایک جفت اور ایک مفرد طاقت کی صورت مین آسکتا ہے جو
اُس سطح کے کسی نقطہ کے گرد عمل کر سکتی ہے فرض کرو کہ طاقت
ط جو ا پر عمل کرتی ہے اُس نظام کی ایک طاقت ہے
اُس سطح کے کسی نقطہ د پر دو طاقتین ط کے مساوی
اور متوازی مخالف سمتون مین لگاؤ اِس سے طاقتون کے
نظام کے عملمین کچھ فرق نہین آئیگا +
پس بجاے طاقت
ط کے جو نقطہ
ا پر عمل کرتی
تھی
اب ایک طاقت
ط ہے جو نقطہ د
پر عمل کرتی ہے اور
ایک جفت جسکی ایک
طاقت ط مقام ا پر اور
دوسری ط مقام د پر عمل کرتی ہے +

وہ پر عمل کرتی ہے -



فرض کرو کہ ق
جو نقطہ ب پر عمل کرتی
ہے ان طاقتون نظام کی
ایک اور طاقت ہو
تو ہم بموجب عمل بالا
بجاے ق کے جو نقطہ ب
پر عمل کرتی ہے کہہ سکتے ہین کہ ایک طاقت ق نقطہ و پر عمل کرتی
اور ایک جفت ہو جسکی ایک طاقت ق نقطہ ب پر اور دوسری
طاقت -ق نقطہ و پر عمل کرتی ہو اسی طرح عمل کرنے سے ہم طاقتون
کے نظام مفروضہ کی جگہہ مندرجہ ذیل رکھہ سکتے ہین

(۱) طاقتون کا ایک نظام جو نقطہ و پر عمل کرتا ہو اور جسکی طاقتین جداگانہ
اصلی طاقتون کے متوازی اور مساوی ہین یہ نظام ایک مفرد
حاصل کے برابر ہوگا جو نقطہ و پر عمل کرے گا ؛

(۲) اسی سطح مین کسیقدر جفتون کا نظام جنکا بموجب حد (۰
کے ایک جفت بن سکتا ہو ؛

چونکہ نقطہ (و) کے گرد طاقت ط کا مقیاس القوۃ اُس
جفت کے مقیاس القوہ کے برابر ہے جسکی ایک طاقت ط
اپر اور دوسری طاقت -ط نقطہ و پر عمل کرتی ہو پس یہ نتیجہ حاصل

ہوتا ہی کہ مفرد جفت حاصل شدہ کا مقیاس بقوۂ طاقتون کی مقیاس القوتون کی
حاصلجمع کی برابر ہوگا ٭

اِسطرح سی طاقتون کا کوئی نظام جو ایک سطح مین ایک جسم مصمت
پر عمل کرتی ہون ایک جفت اور ایک مفرد طاقت سی بدل
ہو سکتا ہی مفرد طاقت اُس سطح کی کسی نقطہ مجوزہ پر عمل
کر سکتی ہی اور مساوی اور متوازی ہوگی اُس طاقت کے جو
سب طاقتون کا حاصل ہوتا اگر وہ طاقتین ایک نقطہ پر اپنی
اصلی سمتون کی جداگانہ متوازی عمل کرتین

ممکن ہی کہ جفت زائل ہوجاوی تو پھر طاقتون کا نظام ایک مفرد
طاقت کی برابر ہوگا یا مفرد طاقت زائل ہو جاوی تو نظام جفت
کے برابر ہوگا یا دونون مفرد طاقت اور جفت زائل ہو جاوین
تو نظام ساکن ہوگا ٭

اگر جفت اور مفرد طاقت مین سی کوئی زائل نہ ہو تو بموجب
(۱۷) حد کی اُنکی ایک مفرد طاقت بن سکتی ہی ٭

(۹۰) اب ہم اِس باب کے مضمون کی تشریح کی لئی چند مثالین بیان کرتی ہین

(مثال اول) اگر طاقتون کا کوئی نظام جو ایک نقطہ پر عمل نہ کرتی
ہون مقدار اور مقام مین کسی کثیر الاضلاع کی اضلاع سی علی الترتیب
تعبیر کیا جاوی تو نظام مذکور ایک جفت کے برابر ہوگا

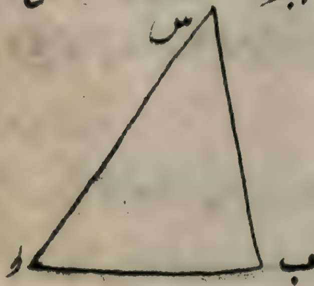
ان طاقتون کی مقیاس القوتون کی حاصلجمع ایک سطح مین

کسی نقطہ کی گرد غیر متبدل ہی کیونکہ اگر نقطہ کثیر الاضلاع کی اندر لیا جای تو مقیاس القوة سب ایک ہی قسم کی ہونگی اور اُنکی حاصلجمع کثیر الاضلاع کے رقبہ کی دو چند سے تعبیر کیا جاویگا اور اگر نقطہ مذکور کثیر الاضلاع کی باہر لیا جاویگا اور اُنکی مقیاس القوت ایک ہی قسم کی نہ ہونگی مگر اُنکی حاصلجمع جبریہ کی قیمت وہی رہیگی یعنی کثیر الاضلاع کی دو چند رقبہ کی برابر ہوگی +

اور چونکہ مقیاس القو تونکی حاصلجمع ایک ایسی معین مقدار کے برابر ہے جو صفر نہیں اِسلئے طاقتون کا نظام ایک جفت کے برابر ہوگا - دیکھو حد ۸۷

(مثال دوم) اب ج ایک مثلث ہی ایک طاقت ط نقطہ آ سے اب کی سمت مین عمل کرتی ہی اور طاقت ق نقطہ ب سے ج کی سمت مین عمل کرتی ہی اور ایک طاقت ح نقطہ ا سے ج کی سمت مین عمل کرتی ہی تو طاقتون کی نسبت دریافت کرو تاکہ وہ ایک ایسی مفرد حاصل کی برابر ہون جو اُس مثلث کے اندرونی دایرہ کے مرکز مین سی گذرتا ہو -

مقیاس لقو تونکی حاصلجمع جبریہ مثلث کے اندرونی دایرہ کے گرد صفر کے برابر ہونی چاہیی دیکھو حد (۸۵) فرض کرو کہ ف دایرہ اندرونی کا نصف قطر ہے

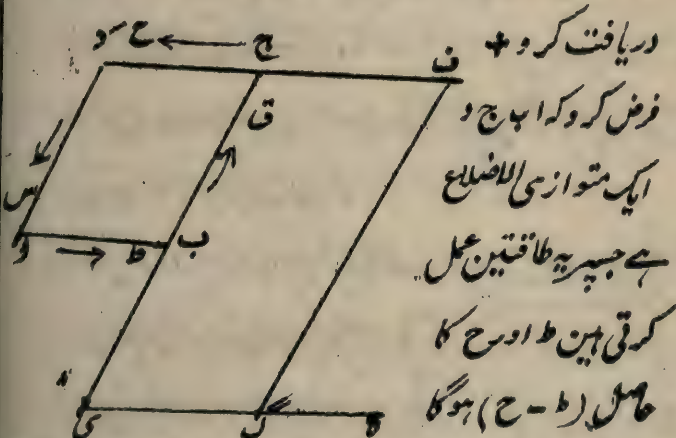


تو ط ف + ق ف = ح ف

اسلیے ح = ط + ق

یہی ضروری اور کافی شرط ہی

(مثال سیوم) طاقتین ط ق ح س علی الترتیب ایک متوازی الاضلاع کے گرد عمل کرتی ہین تو اُنکی حاصل کی سمت دریافت کرو +



فرض کرو کہ ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے جسپر یہ طاقتین عمل کرتی ہین ط اور ح کا حاصل (ط - ح) ہوگا اور او ر کی متوازی سمت مین نقطہ ی پر جو ج ب خارجہ کا ایک نقطہ ہی عمل کریگا اِسیطرح کہ

ج ی / ب ی = ح / ط

ق اور س کا حاصل ق - س ہوگا اور ب ج کی متوازی نقطہ ف پر جو د ج خارجہ کا ایک نقطہ ہی عمل کریگا اسطرح کہ ج ف : د ف :: س : ق -

ی گ د ب کا متوازی اور ف گ ج ب کا متوازی کھینچو بس چارون طاقتونکا حاصل نقطہ گ سے ہوکر گزرتا ہی ی گ کو نقطہ ہ

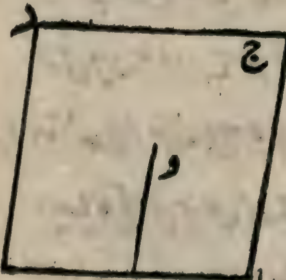
تاسہ خارج کرو اسطرح سمجھکرکہ گ ہ : گ ف :: (ط – ح) : (ق – س) تو وہ خط جو نقطہ گ کو ف ہ کے نقطہ میانی سے وصل کریگا حاصل کی سمت کو تعبیر کریگا)

ہمنے ط کو ح سے بڑا اور ق کو س سے بڑا فرض کرلیا ہے اگر کوئی صورت ہو تو اس مین تبدل ضروری بہ آسانی ہوسکتا ہے۔

یا ہم اسطرح سے عمل کرسکتے ہین۔

فرض کرو کہ اب = ع اور او = ک کسی نقطہ و سے وم – ح ب کا متوازی کھینچو۔

فرض کرو کہ ام = لا اور وم = ی



اب ہم طاقتون کی مقیاس القوۃ نقطہ د کے گرد لے سکتے ہین

ط کا مقیاس = ط × وم ×
جب وم ب = ط × ی × جب ا
ق کا مقیاس القوۃ = ق م ب جب
= ق (ع – لا) جب ا۔

ح کا مقیاس القوۃ = ح (ب ج – و م) جب آ = ح (ک – ی) جب ا۔

س کا مقیاس القوۃ = س × ام جب ا = س × لا جب ا

اب اگر وہ حاصل کی خط تحریک پر کوئی نقطہ ہو تو مقیاس القوتون کے

حاصل جمع جبریہ نقطہ و کی گرد برابر صفر کے ہوگی +

یعنی ط ی + ق (ع - لا) + ح (ک - ی) + س لا = ۰ یا

(ط - ح) ی - (ق - س) لا + ق ع + ح ک = ۰

اس سے ام اور م و کی نسبت دریافت ہوگئی +

جبکہ وحاصل کی خط تحریک پر کوئی نقطہ مثلاً فرض کرو کہ نقطہ و خط ا د مین واقع ہی تو لا = ۰ پس ی = $\frac{\text{ق ع + ح ک}}{\text{ح - ط}}$

اسسے وہ نقطہ معین ہوجاتا ہی جہان حاصل کی سمت ا د کو قطع کرتی ہی اسی طرح سی وہ نقطہ معلوم ہوسکتا ہی جہان حاصل کی سمت اب کو قطع کری +

سوالات نمبر (۶)

(۱) ا ب ج د ایک مربع ہی ایک طاقت تین پونڈ کی ا سے ب کی سمت مین عمل کرتی ہی اور ایک طاقت ۴ پونڈ کی ب سی ج کی سمت مین عمل کرتی ہی اور ایک طاقت ۵ پونڈ کی ج سی د کی سمت مین عمل کرتی ہی ایک مفرد طاقت دریافت کرو جسکی ساتھہ سکون رہی +

(۲) ایک آدمی کچھ بوجھ ایک لکڑی کی سری پر جو اُسکے کندھی پر دھری ہوئی ہی لئی جاتا ہی جبکہ لکڑی کا وہ حصہ اُسکے کندھی اور ہاتھ کی درمیان واقعہ ہی جتنا کم کیا جاوی تو ثابت کرو کہ اُسکے کندھی کا دباؤ زیادہ ہوتا جاویگا اس تبدیلی سی زمین پر اُسکی دباؤ مین بھی کچھ فرق ہوگا ؟

(۳) اگر ایک سطح مین کسیقدر طاقتین ایک جفت کی برابر ہون تو ثابت

گردا گرد دی ایک عمل کرین اور انکی میلان باہمی وہی رہین جیسا کہ حالت اول مین تھے تو ثابت کرو کہ وہ جسم کو سکون مین رکھینگے

(۴) اب ج ایک مثلث ہے ہ و و ک اُسکے اضلاع مین ایسے نقطے ہین کہ $\frac{\text{ب ہ}}{\text{ہ ج}} = \frac{\text{ج و}}{\text{و ا}} = \frac{\text{ا ک}}{\text{ک ب}}$ تو ا ب اور ب ج گرد متقیاس القوۃ کے ثابت کرو کہ طاقتین جنکو ا ہ و ب ر اور ج ک تعبیر کرتے ہین ایک جفت کی برابر ہونگی سوا اُس حالت کی جب ہ و ک اضلاع کے نقاط درمیانی ہین تو اُس صورت مین طاقتین ساکن ہونگی۔

(۵) آ اور ب نقاط معین ہین کسی نقطہ ج پر جو اُس دایرہ کے قوس پر واقع ہے جو اب کو وتر مانکر بنایا جاوے دو طاقتین عمل کرتی ہین یعنی ط ج ا کی سمت مین اور ق ج ب کی سمت مین تو ثابت کرو کہ اُن کا حاصل ایک نقطہ معین مین سے ہوکر گذریگا جو اُس دوسری قوس پر واقع ہوگا جو دایرہ کا متمم ہے ❊

(۶) اب ج د ایک ذو اربعۃ الاضلاع دایرہ کے اندر بنائی گئی ہے طاقتین ط و ق د ج آ ب آ د اور ج ا کی سمت مین عمل کرتی ہین اسطرح کہ ط : ق :: ج د : ب ج : ب د تو ثابت کرو کہ طاقتین ساکن ہونگی ❊

(۷) دو طاقتین خطوط م ا – اور م ب سے تعبیر کی گئی ہین اور دو اور طاقتین ن ج اور ن د سے کی گئی ہین تو ثابت کرو کہ

کہ چارون طاقتین ساکن نہین ہونگی جبتک کہ م ن اب اورج د دونونکی تنصیف نکریں *

(۸) ایک شکل ذوار بعۃ الاضلاع کے اندر ایک ایسا نقطہ معلوم کرو کہ اگر اُس نقطہ سے شکل مذکورہ کے زاویون تک خطوط کھینچے جاین لیکن اور وہ طاقتون کو تعبیر کرین تو طاقتین ساکن ہونگی *

(۹) چند طاقتین جو اعداد ۱ و $\sqrt{3}$ و ۲ کے متناسب ہین ایک ہی نقطہ پر عمل کرتی ہین اور ساکن ہین تو انکے خطوط مبدا انکی زوایا درمیانی دریافت کرو *

(۱۰) دو مساوی طاقتین ط اور ط ۶۰° درجہ کے زاویہ پر عمل کرتے ہین اور دو اور مساوی طاقتین ق اور ق زاویہ قائمہ بناکر عمل کرتی ہین اور دونون صورتون مین حاصل کی مقدار ایک ہی ہے۔ تو ثابت کرو کہ ط : ق :: $\sqrt{2}$: $\sqrt{3}$ *

(۱۱) ج اور ب دو نقاط معین ہین اور ج ا اور ج ب دو طاقتون کو تعبیر کرتے ہین اگر نقطہ ا کسی خط مستقیم کی سمت مین حرکت کرے تو ثابت کرو کہ اُس خط کا سِر جو طاقتونکی سمت کو تعبیر کرتا ہے خط مذکور کے متوازی حرکت کریگا *

(۱۲) ایک کثیر الاضلاع کے ضلع سوا ایک ضلع کے علی الترتیب طاقتون کے تعبیر کرتے ہین تو ثابت کرو کہ یہ طاقتین ایک حاصل کے برابر ہونگی جو ضلع مستثنیٰ کے متوازی ہوگا *

باب ہفتم دربیان جسم محدود الحرکت

(۹۹) جسم محدود اُسے کہتے ہین جسکی حرکت کا طریقہ مخصوص ہو اسکی مثال ایک ایسا جسم ہی کسی معین محور کے گرد ہی گہوم سکتا ہی یعنی الا سے اور کوئی حرکت نہیں دیجا سکتی + اسحالت مین سوائے اُن اسبابکے جو اُسکی حرکت کو مخصوص کرتے ہین اور طاقتین عمل کر سکتی ہین اور ہم اُن شرائط کو معین کرنا چاہتے ہین جو جسم کی معدلت کیواسطے اِن طاقتونکی بابت کافی ہونگی +

(۱۰۰) جب ایک جسم اپنے محور کے گرد ہی گہوم سکتا ہی اور اُسکی محور کی اوپر ایک سطح عمود وار ہین اور طاقتین عمل کرتے ہین اس سطح سی کہ محور اور سطح مفروضہ کی نقطہ تقاطع کے گرد اِن طاقتونکی مقیاس القوتونکی حاصلجمع جبریہ صفر کے برابر ہو تو جسم ساکن رہیگا +

اگر طاقتون کا نظام ساکن نہ ہوگا تو ایک مفرد حاصل کی برابر ہوگا یا ایک جفت کی +

اِس صورت مین طاقتون کا نظام جفت کی برابر نہیں ہو سکتا کیونکہ تب تو سطح مفروضہ کے کسی نقطہ کے گرد مقیاسونکی جبریہ حاصلجمع صفر نہیں ہو سکتی - فرض کرو کہ طاقتون کا نظام ایک مفرد حاصل کی برابر ہی چونکہ طاقتون کی مقیاس القوتونکی حاصلجمع اُس نقطہ کی گرد جہان محور سطح کو قطع کرتا ہے برابر صفر کے ہے اِسلئے حاصل کا خط میلان اُس نقطہ مین

سے ہو کر گذرنا چاہیے۔ پس حاصل جسم کو محور کے گرد حرکت نہین دیسکتا اِسلئے جسم ساکن ہوگا ❖

(۱۰۱) حدود مذکورہ بالا سے معلوم ہوتا ہی کہ جو شرط بیان ہوئی ہے وہ جسم کے سکون کیواسطے کافی ہی مگر مذکورہ سکون کیواسطے لازم یعنی ضروری بھی ہی کیونکہ اگر یہ شرط پوری نہ ہوگی تو طاقتون کا نظام یا تو ایک جفت کے برابر ہوگا یا ایک مفرد حاصل کے جو محور مین سے ہو کر نہین گذرتا اور اِن دونون طاقتون مین جسم اپنے محور کے گرد حرکت کرنے لگے گا ❖

(۱۰۲) دونون حدود مذکورہ بالا کے ایک سادہ مثال مجرار۔ یا لیور ہے مجرار ایک مصمت جسم ہوتا ہے جو کہ ایک سطح مین ایک نقطہ کے گرد جسکو اُس کا حامل کہتے ہین گھوم سکتا ہی اور اُس پر ایسی طاقتین عمل کر سکتی ہین جو اُسی اُسکے حامل کے گرد گھمانیکے قابلیت رکھتے ہین۔ مجرار کے سکون کے واسطے حامل کے گرد دونون طاقتونکی مقیاس القوۃ مساوی اور مخالف ہونی چاہئین اِسلئے شرط معدلت جو حد (۱۰۰) مین بیان ہوئی ہی اکثر اصول مجرار کہلاتی ہی۔

(۱۰۳) جو جسم مقید یعنی محدود الحرکت نہ ہو اُسی جسم غیر مقید کہتے ہین جسم مقید کی بحث سے ہمین غیر مقید جسم کے معدلت کی مبحث بخوبی واضح ہو سکتی ہی جو شرط مقید جسم کی معدلت کے واسطے ضروری وہی شرط جسم غیر مقید کی معدلت کے واسطے

بھی ضرور ہوگی اگرچہ جو شرط کہ پہلی صورت مین کافی ہو عموماً دوسری صورت مین کافی نہیں ہوگی ٭

مثلاً حد ۸۶ مین کسی غیر مقید جامد جسم کے معدلت کی بابت ایک اصول قایم کیا گیا ہے اور حد (۱۰۰) کے ثبوت سے اِس اصول کی توضیح ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ ایک جسم ایک ہی سطح مین کئی طاقتون کے عمل سے ساکن ہے فرض کرو کہ جسم کے دو نقاط جو اُس سطح پر ایک عمود وار خط مین واقع ہین غیر متبدل ہون یا مستقل اس سے اسکی معدلت مین کچھ فرق نہین آتا کیونکہ اُس مین دو نقطون کو غیر متبدل کرنے سے ہم جسم کو کوئی حرکت نہین دیتے صرف اُسکی ممکن حرکت کو کسیقدر محدود کرتے ہین اب بھی جسم مفروض اُس خط کے گرد جو دونو نقاط معین کو وصل کرتا ہے گھوم سکتا ہے اور بموجب حد (۱۰۱) کے جبتک ان طاقتون کی مقیاس القوتونکی حاصل جمع جبریہ اوس خط مستقیم اور سطح مفروضہ کے نقطہ تقاطع کے گرد زائل نہو جاوے تب تک یہ جسم ساکن نہین رہیگا

(۱۰۴) فرض کرو کہ ایک جسم ایک معین محور کے گرد گھوم سکتا ہے اور اُسپر ایسی طاقتین عمل کرتے ہین جو محور پر کسی ایک عمود وار سطح مین نہین ہین بالفعل اس صورت کی معدلت کی شرائط کا کامل ثبوت نہین دے سکتی مگر چند

ایسی اصولونکے فرض کرنے سے جو خود عیان ہین ہم کافی ثبوت دے سکتے ہین۔

اول فرض کرو کہ طاقتین مختلف نظامون مین عمل کرتی ہین ایسی سطحون مین جو سب محور پر عمود وار ہین۔ ہم یہ بلا ثبوت فرض کر سکتے ہین کہ جسم کی حرکت دینیکی لحاظ سے نظامون کے خاصیت مین کچھ فرق نہین آویگا اگر کل سطوح کو ایک سطح پر منطبق خیال کرلین اور پھر یہ طاقتین ایسے نظام مین تحویل ہوجاوینگے جو ایک ہی سطح مین جو محور پر عمود وار واقع ہے عمل کرتے ہین اور اُس صورت مین حد (۱۰۰) اور (۱۰۱) کا عمل در آمد ہو سکتا ہے

دوسری صورت۔ فرض کرو کہ طاقتین چاہے کیسی ہون ہر ایک طاقت کو دو اجزا علے القوائم مین جنمین سے ایک محور معین کے متوازی ہو منفصل کرو ہم یہ بات فرض کر سکتے ہین کہ جو اجزا محور کے متوازی ہین وہ جسم کو محور کے گرد حرکت نہین دے سکتے اور اسلئے ہم اُنکا خیال نہین کرینگے باقی اجزا طاقتونکے ایسی نظام ہونگے جو محور کے عمود وار سطحون مین عمل کرتے ہین اور پہلے صورت کیطرح اُن سب کو ایک ہے سطح مین عمل کرتے فرض کر سکتے ہین۔ پس حد (۱۰۰) اور (۱۰۱) کا عمل در آمد اس صورت مین ہو سکتا ہے۔

(۱۰۵) فرض کرو کہ ایک جسم صرف ایک ایسی طریقہ سے حرکت کر سکتا ہے
وسکی تمام نقاط متوازے خطوط پیدا کرتے ہین مثلا فرض کرو کہ دو سیدھی سلاخین
جسم مین سے گذرتے ہین اور جسم ان دونون پر پہسلنے کی قابلیت رکھتا ہے
فرض کرو کہ جسم پر طاقتون کا کوی نظام بھی عمل کرتا ہے ہر ایک طاقت کو دو اجزا
مین منفصل کرو جو باہم عمود وار ہون اور اونمین سے ایک جز سلاخہای مذکورہ کے
متوازے ہو تو معدلت کی ضرورے اور کافی شرط یہہ ہے کہ اون اجزا کی حاصل
سلاخہای معین یعنے ممکن حرکت کی سمت کی متوازے عمل کرتے ہین زایل ہو
... اگر ایک ہی سلاخ جسم مین سے گذرے تو جسم پہسل بھی سکتا ہے اور اوسکے
گرد گھوم بھی سکتا ہے اسحالت مین علاوہ شرط مذکورہ بالا کے (۱۰۴) حد کی
شرط سکون بہی پوری ہونے چاہیے
... حالتو نسے سکون کے لئے جو شرط حد (۹۰) مین بیان ہوئی اوسکی توضیح
... تے ہے
(۱۰...) جبکہ تین طاقتین ایک جسم کو ساکن رکہین تو اونکی خطوط میلان ایک ہی
سطح مین واقع ہونی چاہئین
فرض کرو کہ کوئی جسم تین طاقتون کے انفعال سے ساکن ہے جسم مفروضہ مین
سے دو نقطہ ایک ایک طاقت کے خط میلان مین اور دوسرا کسی دوسری
طاقت کی خط میلان مین غیر متغیر فرض کرو مگر نقاط اسطرحسے فرض کیجاوین
کہ خط اون دونونکو وصل کرتا ہے وہ تیسری طاقت کی خط میلانکی متوازے
... اوس سے جسم کے معدلت مین کچہہ فرق ہوگا ــــ جسم مفروضہ

اب بھی اوس خط کے گرد جو نقاط معینہ کو وصل کرتا ہے بطور محور کی گھوم سکتا
اور ساکن نہین رہیگا جب تک کہ تیسری طاقت کا خط میلان محور مین سے نہ گذرے
پس کوئی خط مستقیم جو دو طاقتون کے خطوط میلان کو قطع کرتا ہے اور تیسری طاقت
خط میلان کی متوازی نہین وہ اوس تیسری طاقت کے خط میلان کو قطع کریگا
اور اسیواسطے تینون طاقتون کے خطوط میلان ایک ہی سطح مین ہوسنے چاہئین
اس نتیجہ کو ۱۳ و ۶۲ جدود کی نتایج کے ساتھ شامل کرنے سے ہمکو کسی جسم
کی معدلت کی شرایط جسپر تین طاقتین عمل کرتے ہون پوری پوری واضح ہوجاتی
ہین

(۱۰۷) اس کتاب مین ہمنے طاقتونکی متوازی الاضلاع سے شروع
کیا ہے اور اوسکے ذریعہ سے اصول مجرار قایم کیا ہے حال مین عموماً یہ طریقہ
رایج ہے لیکن بشیتر عموماً اصول مجرار سے شروع کرتے ہین اور اوسکی ذریعہ
سے طاقتونکا متوازی الاضلاع قایم کرتے ہین اس دوسری طریقہ کے
خاص خاص اصول ہم مختصر طور پر بیان کرتے ہین بہت سے اصول جو علوم متعلقہ
مانی جاتے ہین مثلاً مندرجہ ذیل مساوی طاقتین جو مجرار کے مساوی بازو کے
انجامون پر عمود وار عمل کرین مجرار کو گھمانے مین برابر اثر پیدا کریگی
ان اصولون سے کئی شکلین ثابت کیجاتے ہین مثلاً مندرجہ ذیل ایک ہموار
افقی سلاخ استوانہ کے وزن کا وہی اثر ہوگا جو اوس صورت مین ہوتا ہے
جبکہ اوسکا کل وزن اوس نقطہ وسطی پر جمع کیا جاوے
اس طریقہ سے اصول مجرار قایم کیا جاتا ہے اول کہیں اسیدہی مجرار کے لئے

بندہ حد مین ہم اسکے طریقہ کی ایک مثال بیان کرینگے اور بعد کی حد مین
بت کرینگے کہ طاقتونکا متوازی الاضلاع مجرار کے اصول سے کیونکر
بت ہو سکتا ہے

(۱۰۸) اگر دو طاقتین ایک مستقیم مجرار پر حامل کے مخالف اطراف مین
دوار عمل کرین تو وہ ساکن ہونگے بشرطیکہ اونمین وہ نسبت ہو جو حامل
سے اونکی فاصلونکے عکسون کو اور مجرار کو مخالف سمتون مین گھمانیکی قابلیت
رکھتی ہون

فرض کرو کہ دو طاقتین ط اور ق ایک
مجرار مستقیم کے نقاط م اور ن پر حامل
کے مخالف اطراف مین عمود وار عمل کرتے ہین اسطرحسی کہ $\frac{ط}{ق} = \frac{ج ن}{ج م}$
فرض کرو کہ طاقتین ایک جانبہ مین گویا مجرار کو مخالف اطراف مین کھمانیکے
ہین تو یہہ طاقتین ساکن ہونگے

ط = ق تو بموجب اصول مسطورہ حد (۱۰۷) سے یہہ شکل ثابت ہو جاتی
ہے اگر ط مساوی ق کے نہین تو فرض کرو کہ ط بڑی ہے
سے خط ن د مساوی ج کی قطع کرو پس ن ج = م د کے ہے
کو برابر م د کی بنا د اور ن ب برابر ن د کی بنا د
فرض کرو کہ طاقتون ط اور ق کا اون وزنون سے اندازہ کیا گیا ہے جنکو
سکین اور اب ایک ہموار سلاخ ہے جسکا وزن ط ق کی برابر ہے
ج ا = ج م م ا = ن د + م د = م ن

اور ج ب = ج ن + ن ب = م د ن د = م ن

پس خط اب کے ج نقطہ پر تنصیف ہوئی

اور $\frac{اد}{دب} = \frac{٢م د}{٢ن د} = \frac{٢ن ج}{٢م ج} = \frac{ط}{ق}$

اسلئے $\frac{اد}{اد + دب} = \frac{ط}{ط + ق}$

لیکن اب کا وزن = ط + ق ہے اسلئے اوسکے حصہ اد کا وزن برابر ہے ط کی اور دب حصہ کا وزن = ق کی

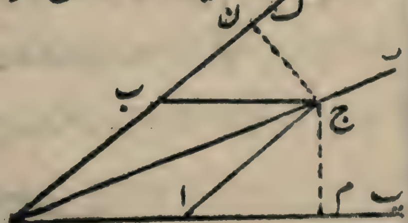
چونکہ نقطہ ج خط اب کا نقطہ ط درمیانی ہے اسلئے سلاخ اب نقطہ ج پر قایم رہیگی اور بموجب دفعہ ۱۰۷ کی اگر حصہ اد اپنے نقطہ وسط م پر سلاخ م ن سے ملایا جاوے اور حصہ ب د نقطہ درمیانی ن پر ملایا جاوے تو اثر وہی ہوگا جیسا پیشتر تھا پس اسحالت مین بھی وزن ساکن رہینگی یعنے طاقت ط نقطہ م پر اور طاقت ق نقطہ ن پر ساکن رہینگی

(۱۰۹) اصول مجرار سے طاقتونکا متوازی الاضلاع ثابت کرنا

فرض کرو کہ ایک طاقت ط خط ہ پ کے سمت مین اور طاقت ق خط ہ ک کی سمت مین عمل کرتے ہین

فرض کرو کہ ہ ر اونکے حاصل کے سمت ہے

اسی حاصل کے سمت مین کوی نقطہ ج فرض کرو ج ا متوازی ہ ک کے اور ج ب متوازی ہ پ کی کہینچو اور ج م ہ پ پر اور ج ن ہ ک پر عمود ڈالو اگر ایک طاقت جو



ق کی حاصل کے برابر ہو رہ کی سمت مین عمل کرے تووہ بعینہ طاقتون ط اور ق کے ایک ہ کو نقطہ د پر ساکن رکہیگی

فرض کرو کہ یہہ طاقتین بذریعہ سلاخون کے جو نقطہ ہ پر ملے ہوئی ہین عمل کرتے ہین تو یہہ سلاخین ساکن رہینگے

فرض کرو کہ نقطہ ج سلاخ پر غیر متغیر ہو گیا ہے اس سے حالت معدلت مین کچہہ فرق نہو گا۔ اب بہی طاقتونکا انتظام نقطہ ج کی گرد گہوم سکتا ہے اور رکہو متا رہیگا جب تک کہ مقیاس القوۃ نقطہ ج کے گرد مساوے اور مخالف ہون پس معدلت واسطے بموجب اصول معیار کے ضرور ہے کہ

ط × م ج = ق × ج ن

پس $\frac{ط}{ق} = \frac{ج ن}{ج م}$

$= \frac{ج ب}{ج ا}$ بموجب (۴ شش م ۶)

$= \frac{ہ ا}{ہ ب}$ پس طاقتین ط اور ق متوازے الاضلاع ہ ا ج ب کے اضلاع ہ ا اور ہ ب کے متناسب ہین اور وتر ہ ج اونکی حاصل کے سمت تعبیر کرتا ہے پس اس شکل سے طاقتونکا متوازے الاضلاع جہتنا کہ حاصل کے سمت کے لئے ضرور ہے ثابت ہو گیا اور بموجب حد ۹۴ کے ہم اوسکو حاصل کے مقدار کے واسطے بہی ثابت کرسکتے ہین

سوالات باب ہفتم

(۱) اب ج د ایک مربع ہے ایک تین پونڈ کی طاقت آ سی ب کیطرف عمل کرتی ہے ایک ۴ پونڈ کی طاقت ب سے ج کیطرف اور ایک ۵ پونڈ کی ج سے د کیطرف - اگر مربع کا مرکز ایک نقطہ معین ہو تو ایک ایسی طاقت معلوم کرو جو آ د کے سمت مین عمل کرکے مربع کو ساکن رکہے

(۲) ایک افقی مجرار کا طول ۱۲ فٹ ہے اور بذریعہ دو وزنوں کے ایک تین پونڈ کا جو اوسکے دو سرونپر عمل کرتے ہین ساکن ہے

اگر ہر ایک وزن مجرار کے سرے سے دو فٹ ہٹایا جاوے تو معلوم کرو کہ سکون کے قایم رکہنے کیلئے حامل کو کسقدر ہٹانا چاہیے

(۳) اگر ایک افقی مجرار کے بازؤں کے سرونپر دو طاقتین جداگانہ ۸ و ۷ پونڈ کے عمل کرین اور بازؤنکا طول جداگانہ ۸ - انچ و ۹ - انچ ہو تو معلوم کرو کہ ایک طاقت ۱ پونڈ کے کس نقطہ پر عمود وار مجرار کے لگائی جاوے تاکہ مجرار ساکن رہے

(۴) کسی مجرار کے بازو ایک دوسری کے ساتھ کسی زاویہ پر مایل ہین تو ثابت کرو کہ اگر مجرار کے سرونپر برابر وزن لگائی جاوین تو وہ ساکن رہیگا بشرطیکہ نقطہ وسط مجرار کا حامل کے عین راس مین واقع ہو

(۵) کسی مجرار بے وزن کی ایک سری پر وزن ط عمل کرتا ہے اور دوسری سری پر وزن ایک پونڈ کا عمل کرتا ہے اور مجرار ساکن ہے - اگر حامل کو مجرار کے نصف طول کے برابر ہٹایا جاوے تو وزن ط کے ساکن رکہنے کیلئے ۱۰ پونڈ کا وزن درکار ہوتا ہے تو ط کا وزن دریافت کرو

(۶) ایک سلاخ اپنے ایک سری کے گرد جو قایم ہے گہوم سکتی ہے دو طاقتین

لاخ کے عمود دار اوسپر عمل کرتے ہین اور اوسکو ساکن رکہتے ہین بڑے
قت ۶ پونڈ کے ہے اور دونون طاقتونکے نقاط عمل کا درمیانی فاصلہ برابر ہے
نصف فاصلی بڑے طاقت کے سری معین سے ہے توچہوٹے طاقت دریافت کرو
ت کرو کہ اگر چہوٹے طاقت کے ساتہہ کوی اور طاقت لگائی جاوین تو بغرض
ون بڑے طاقت کے ساتہہ اوسس سے ڈیوڑہی طاقت شامل کرنے چاہیئے
۷) اب ج ایک مثلث بی وزن ہے جبکا زاویہ ج قایمہ ہے اور ج ا : ج ب : :
: ۳ - مثلث کا نقطہ ج معین ہے اور دو طاقتین ط و ق نقاط ا و ب پر جدا گانہ
ا و ج ب کے عمود دار عمل کرتے ہین اور مثلث کو ساکن رکہتے ہین تو ط و ق کے
ت دریافت کرو
۸) سوال نمبر ۷ مین اگر طاقت ط نقطہ ا پر ا ج کے عمود دار عمل کرے
ر طاقت ق نقطہ ب پر ب ا کے عمود دار تو ط اور ق کے نسبت دریافت کرو
مثلث ساکن رہے
۹) ایک ۱۰ فٹ لمبی بے وزن سلاخ کا نچلا سرا ب ایک قایم لکڑے کے
ہ بذریعہ ایک چوٹلی کے لٹکایا گیا ہے جس سے وہ اوسکے گرد گہوم
ا ہے اور اوسکا دوسرا سرا آ بذریعہ ایک رسی کے جبکا طول ۸ فٹ
ہے ایک نقطہ ج کے ساتہہ جو ب سے عین راس مین ہے باندہا گیا ہے
ا ج ایک قایمۃ الزاویہ مثلث بن گیا ہے اگر نقطہ آ سے ایک وزن ایک ٹن کا
یا جاوے تو رسی کی کشش دریافت کرو
۱۰) اب ج ایک بی وزن خمدار مجرا رہے جبکا حامل ب ہی جب ب ج

حالت افقی مین ہو تو اوزان ط و ق نقاط ا و ج سے لٹکائی جا کر ساکن رہتی ہین
اور جب اب حالت افقی مین ہو تو اوزان ط د ق اوسیطرح لٹکائی جا کر ساکن رہتی
ثابت کرو کہ زاویہ اب ج برابر ۱۳۵ درجہ کے ہے

(۱۱) ایک مثلث اپنی سطح مین ایک نقطہ کے گرد جو مثلث کے اندر دایرہ کے
مرکز کے ساتھہ منطبق ہے گہوم سکتا ہے مثلث کی اضلاع کے سمتون مین طاقتین
عمل کرتے ہین اور اوسکو ساکن رکھتی ہین تو ثابت کرو کہ ان مین سے ایک طاقت
باقی دو کی حاصل جمع کے برابر ہوگے

(۱۲) ایک رسی چہوٹی سے وزندار چہلی مین سے گذرتی ہے اور اوسکی سری
ایک بہاری وزن کے سرونکے ساتھہ باندہی ہوئے ہین تو ثابت کرو کہ
جب سکون ہو تو چہلا حامل کی عین راس مین واقع ہونا چاہیئے

(۱۳) ایک مساوی اضلاع کے ذوار بعہ الاضلاع شکل کے نقاط وسط سے
سطح شکل مین ۴ طاقتین ط و ق و ہ و س جداگانہ اضلاع کے عمود دار
باہر کے طرف عمل کرتے ہین تو شرط سکون دریافت کرو جبکہ شکل نکو
صرف اپنے وترونکے نقاط تقاطع کے گرد گہوم سکتی ہے اور نیز اوسصورت
مین جبکہ شکل مذکور غیر مقید ہو شرایط سکون دریافت کرو

(۱۴) دو طاقتین ط و ق ایک نقطہ و پر عمل کرتے ہین اور اونکا حاصل
ح ہے کوی خط ط و ق و ح کے سمتون کو نقاط ا و ب و ج پر جداگانہ
قطع کرتا ہے تو ثابت کرو کہ $\frac{ط}{و ا \times ب ج} = \frac{ق}{و ب \times ا ج}$
$= \frac{ح}{و ج \times ا ب}$

(۱۵) ایک بے وزن سلاخ اب جسکا طول ۱۴ انچ ہے بذریعہ دو
رسیوں کی ایک کیل سے لٹکتا ہے رسی اج کا طول ۱۵ انچ اور ب ج کا
۱۳ انچ ہے نقطہ ا سے ایک وزن ۱۳۰ پونڈ کا لٹکتا ہے اور ب سے ۲۰
پونڈ کا اگر سب سلسلہ سکون مین ہو تو رسیون کے کشش دریافت کرو۔

باب ہشتم

متوازی طاقتون کے مرکز دریافت کرنیکے باب مین

(۱۱۰) فرض کرو کہ دو متوازی طاقتین جداگانہ دو نقطون پر عمل کرتے ہین تو ہم جانتے ہین کہ اونکا حاصل اون طاقتونکے جبری حاصل جمع کے برابر ہے۔ اور اونکے متوازی عمل کرتا ہے اور نیز وہ اوس خط مستقیم کے ایک خاص نقطہ پر عمل کریگا جو اون دونون نقاط کو وصل کرتا ہے دیکھو دفعہ ۱۰ اور ۱۶ علاوہ اسکے یہہ معین نقطہ قایم ہے رہیگا خواہ ان دونون طاقتونکے سمت بدل جائے مگر وہ متوازی ہے رہین اس نقطہ کو ان دونون متوازی طاقتونکا مرکز کہتے ہین اور اوسکے تعریف یہہ ہے

متوازی طاقتونکے کسے نظام کا مرکز وہ نقطہ ہوتا ہے جسپر کہ اوس نظام کا حاصل عمل کرتا ہے متوازی طاقتونکے سمت خواہ کوئی ہو

(۱۱۱) متوازی طاقتونکے کسی نظام کے حاصل اور مرکز دریافت کرنیکے باب مین۔

فرض کرو کہ متوازی طاقتین ط و ق د ح وس جداگانہ نقاط ا ب ج د پر عمل کرتے ہین

اب کو وصل کرو

اور اوسی نقطہ ل پر اسطرح تقسیم کرو کہ ال :ل پ : : ق : ط پس طاقت
ط جو ا پر عمل کرتی ہے اور ق جو ب پر انکا حاصل (ط + ق) نقطہ ل پر
انکی متوازی عمل کریگا ل ج کو ملاؤ اور اوسے م پر ایسی دو حصونمین تقسیم کرو
کہ ل م : م ج : : ح : ط + ق ۔ پس ط + ق نقطہ ل پر اور ح نقطہ ج پر انکا حاصل ط
+ ق + ح نقطہ م پر انکی متوازی عمل کریگا

م د کو ملاؤ اور اوسے نقطہ ن پر ایسا تقسیم کرو کہ م ن : ن د : : س : ط +
ق + ح پس ط + ق + ح نقطہ م پر اور س نقطہ د پر کا حاصل ط + ق + ح +
س نقطہ ن پر اسکے متوازی سمت مین عمل کریگا

پس ہمین چارون متوازی طاقتون کا حاصل اور مرکز معلوم ہوگیا اور
اگر زیادہ طاقتین ہون تو اسطرحسے عمل کرنے سے اونکا حاصل
اور مرکز معلوم ہوجائیگا

(۱۱۲) پچھلی شکل مین ہمنے سب طاقتون کا یک جانبہ فرض کیا ہے
اگر طاقتین یک جانبہ نہون تو تہوڑے تغیر و تبدل سے وہی نتیجہ حاصل
ہوسکتا ہے

باہم انکی علیحدہ علیحدہ مجموعی بناسکتے ہین جسمین ہر ایک مجموعہ کی طاقتین یک جانبہ
ہون اور ہر ایک مجموعہ کا علیحدہ علیحدہ مرکز دریافت کرسکتے ہین اور
بموجب حد (۱۰۱) کے ہم تمام طاقتون کے مجموعہ کا حاصل اور مرکز دریافت
کرسکتی ہین

اخیر مین ہمیشہ ایک ہی حاصل اور ایک مرکز دریافت ہوجائیگا سوای

اوس حالت کی جبکہ تمام طاقتونکے حاصل جمع تسبیر دیفر ہو اسصورت مین سب طاقتین یا تو ساکن ہو گی یا اونکا ایک جنت بنیگا دیکھو دفعہ (۹۵)

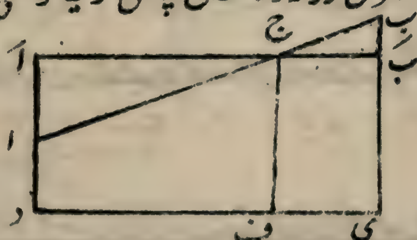
فرض کرو کہ ہمنے متوازنے طاقتونکی مجموعہ کو دو مجموعہ مین تقسیم کیا۔ اگر سب ایک مجموعہ کا حاصل دوسری مجموعہ کے حاصل کے برابر ہو اور دونون مجموعونکی مرکز منطبق ہون تو کل مجموعہ ساکن ہو گا اور بر خلاف اسکے اگر کل مجموعہ ساکن ہو تو ایک مجموعہ کا حاصل دوسری مجموعہ کے حاصل کے برابر ہو گا اور دونون مجموعون کے مرکز منطبق ہونگے

(۱۱۳) یہہ قاعدہ متوازنے طاقتونکے مرکز دریافت کرنیکا علم ہندسہ کے مددسے ثابت کیا گیا ہے اب ہم اسے نتیجہ کو جبر و مقابلہ کے قاعدون سے نکالتے ہین

(۱۱۴) دو متوازی طاقتونکی مقامات انفعال کے فاصلے کسی خط معین سے معلوم ہین تو اوس خط سے ان متوازنے طاقتونکی مرکز کا فاصلہ معلوم کرنا ہے خط معین اور نقاط سب ایک ہی سطح مین ہین

اوّل فرض کرو کہ ا اور ب دو متوازی یک جانبہ طاقتون ط اور ق کے مقام انفعال ہین انکا حاصل ط + ق اسکے متوازنے ہو گا

اور فرض کرو کہ وہ نقطہ ج پر عمل کریگا تو $\frac{ط}{ق}$ = $\frac{ج ب}{ج ا}$ فرض کرو کہ ا د و ب ی و ج ف نقاط ا ب و ج سے کسی ایک خط مستقیم پر عمود ہین جو اوسے سطح مین ہے



جسمین نقاط ا و ب ہین

فرض کرو کہ ا د = طَ اور ب ہ = قَ اور ج ف = حَ اب ہمین طَ اور قَ

کے قیمتین معلوم ہین تو حَ کے قیمت معلوم کرنی ہے

نقطہ ج سے اَ ج بَ و ف ہ کا متوازی کہینچو جو ا د و ب ہ سے نقاط اَ

اور بَ پر ملتا ہے

پس $\frac{ج ب}{ج ا} = \frac{ب بَ}{ا اَ}$ بموجب (ہ ش ۶ م)

پس $\frac{ط}{ق} = \frac{ب بَ}{ا اَ} = \frac{ب ہ - ہ ط}{د اَ - د ا} = \frac{قَ - حَ}{حَ - طَ}$

∴ مگر ط × (حَ - طَ) = ق × (قَ - حَ)

∴ (ط + ق) حَ = ط طَ + ق قَ

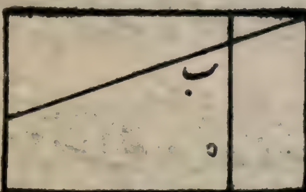
∴ $حَ = \frac{ط طَ + ق قَ}{ط + ق}$ ۔

دویم فرض کرو کہ نقاط ا و ب پر دو مخالف متوازی طاقتین ط اور ق عمل

کرتے ہین

فرض کرو کہ ق بڑی ہے تو پہلی شکل کا عمل کر کے اور حروف رکہکر یہہ

نتیجہ حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{ط}{ق} = \frac{ج ب}{ج ا} = \frac{ب بَ}{ا اَ}$



∴ $\frac{ط}{ق} = \frac{ہ بَ - ب ہ}{د اَ - د ا}$

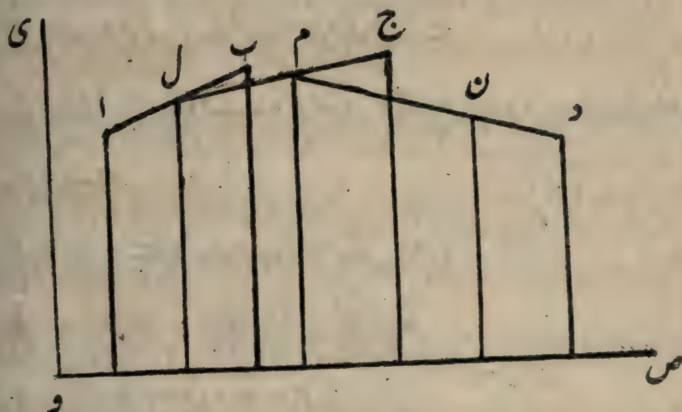
∴ ط × (حَ - طَ) = ق × (حَ - قَ)

اسلیئے $حَ = \frac{ق قَ - ط طَ}{ق - ط}$

یہہ نتیجہ پہلی شکل سے بہی حاصل ہو سکتا ہے اگر ط کے بجای - ط رکہا

جاوے

(۱۱۵) کسیقدر متوازی طاقتونکے نقاط انفعال کی کسی خط سے فاصلے ہین تو اوسکی مرکز کا فاصلہ اوسے خط سے معلوم کرو۔ خط اور نقاط



سب ایک ہی سطح مین ہین۔

فرض کرو کہ متوازی طاقتین ط ق ح س نقاط اب ج د پر عمل کرتے ہین اور طَ قَ حَ دَ سَ نقاط ا ب ج د کے ایک خط مستقیم ہ ص سے فاصلے ہین اور یہہ خط مستقیم اوسی سطح مین ہے جسمین نقاط ا ب ج د ہین خط ا ب کہینچو اور اوسی ل پر ایسے دو حصون ہین تقسیم کرو کہ ا ل : ل ب :: ق : ط تو ل مرکز ہے ط کا جو ا پر عمل کرتے ہے اور ق کا جو ب پر عمل کرتے ہے اور یہہ طاقتین مساوی (ط + ق) کے ہین جو نقطہ ل پر عمل کرتے ہے

فرض کرو کہ لَ نقطہ لَ کا ہ ص سے فاصلہ ہے تو $لَ = \frac{ط طَ + ق \times قَ}{ط + ق}$

ل ج کو ملاؤ اور اوسی نقطہ م پر اسطرحسے تقسیم کرو کہ ل م : م ج :: ح : ط + ق تو م مرکز ہے ط + ق کا جو ل پر عمل کرتے ہے اور ح کا جو ج پر

مل کرتی ہے

رض کرو کہ مَ نقطہ م کا خط ہ ص سے فاصلہ ہے تو مَ = (ط + ق) × (ق‌ع) + ح حَ / ط + ق + ح

= ط طَ + ق × قَ + ح حَ / ط + ق + ح

ط م د کو ملاؤ اور اوسی نقطہ ن پر اسطرح سے تقسیم کرو کہ م ن : ن و :: س

ط + ق + ح - تو ن مرکز ہے ط + ق + ح کا جو نقطہ م پر عمل کرتی ہین اور

ں کا جو نقطہ د پر عمل کرتی ہے

ض کرو کہ ن نقطہ ن کا ہ ص سے فاصلہ ہے پس ن

= (ط + ق + ح) مَ + س سَ / ط + ق + ح + س = ط طَ + ق قَ + ح حَ + س سَ / ط + ق + ح + س پس

سطرح سے ہمنے ہم متوازی طاقتونکے مرکز کا فاصلہ ہ ص سے دریافت کر لیا

. زیادہ طاقتین ہون تو اسیطرح سے عمل کر سکتے ہین؛

ت ن کے ترتیب وار شکل پر غور کرنی چاہیے ان طاقتونکو چاہی ہم جسب

ب سے مرتب کرین نتیجہ نکلتا ہے

(١١٦) اسیطرح سے اگر ا ب ج د ایک دوسری خط ہ ی سے جو اوس

ہین سے فاصلے معلوم ہون تو ہم متوازی طاقتونکی مرکز کا فاصلہ اوس خط

سے بہی معلوم کر سکتے ہین

. ہمین مرکز کا فاصلہ سطح مین دو خطوط مستقیم سے معلوم ہو گیا تو مرکز کا

م بہی معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ مرکز اون دو خطوط کا نقطہ تقاطع ہوگا

ہ ص اور ہ ی ف کے متوازی ہونگے اور اون خطوط سے معلومہ فصلون

(۱۱۷) حد (۱۱۵) کی بیان مین ہمنے سب طاقتون کو یک جانبہ مقصود کیا ہے اگر سب طاقتین یک جانبہ ہون تو کچھہ تہوڑا سا تغیر عمل مین آیگا خواہ ہم کل طاقتونکو دو زمرون مین تقسیم کرین جسمین سے ہر ایک زمرہ مین یک جانبہ متوازی طاقتین ہون - پھر ایک زمرہ کا مرکز معلوم کرلین اور پھر (۱۱۴) حد سے متوازی طاقتونکی کل نظام کا مرکز معلوم کرلین سنیز نتیجہ وہی ہوگا جو (۱۱۵) حد سی نکلتا ہے اون طاقتونکے علامت جو ایک سمت مین عمل کرین مثبت خیال کرین اور جو دوسری سمت مین عمل کرین منفی (۱۱۸) - (۱۱۴) مین ہمنے فرض کیا ہے کہ خطوط ط ا د و ب ہ و ج ف - د ف ہ پر عمود وار ہین مگر یہہ کچھہ ضرور نہین صرف یہہ بہی کافی ہے کہ یہہ سب خطوط آپسمین متوازی ہون اسیطرح جیسے (۱۱۵) مین یہہ ضرور نہین کہ طَ قَ حَ و سَ خط ہ ص سے عمود وار فاصلی ہون صرف اتنا لازم ہے کہ اونکے سمتین سب متوازی ہون

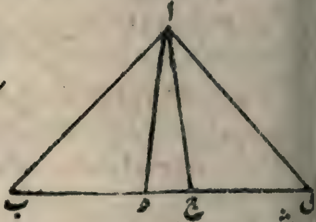
(۱۱۹) اس ثبوت کو ہم اوس صورت کیواسطی بہی قایم کرسکتے ہین جبکہ متوازی طاقتونکے مقام انفعال سب ایک ہی سطح مین نہون (۱۱۴) کے ثبوت مین فرض کرو کہ ا د و ج ف و ب ہ نقاط ا ب و ج کے بجای کہی خط سے فاصلے ہو نیکی کسی سطح مفروضہ سے فاصلے ہین خواہ عمود وار خواہ کسی خط کے متوازی پس موافق حدود (۱۱۴) و (۱۱۵) کے اگر متوازی طاقتونکے نقاط انفعال کے ایک سطح مفروضہ سے فاصلے اوسی سطح سے دریافت کرسکتے ہین

(۱۲۰) ایک جسم کا وزن اوسکے اجزا صغیر کے وزنون کا مجموعہ قیاس ہوسکتا ہے اور ان اجزا کے وزن یک جانبہ متوازی طاقتون کا نظام ہوا

ہین اور ایسے نظام کا ہمیشہ ایک مرکز ہوتا ہے ۔ (دیکھو حد ۱۱۱) ان متوازی
طاقتون کا مرکز جو کسی جسم کے اجزاء کے وزنون سے بنے ہین اوس جسم کا
مرکز نقل کہلاتا ہے ۔ پس مرکز نقل متوازی طاقتونکے مرکز دریافت کرنیکی ایک خاص
صورت ہے مگر اوسکے طرف خاص توجہ دلانے کے لئے عام اصول کے نسبت
بیان ہے ۔ کیونکہ جسم کے اجزاء کے وزن یک جانبہ طاقتین بناتے ہین پس
ہین اوسصورت مین حد (۱۱۴) کی دوسرے حالت کے ضرورت نہین پڑیگی

(۱۲۱) اب دو مثالین لکھی جاتے ہین جنکے نتایج قابل غور ہین مثال اوّل ا ب ج
ایک مثلث ہے متوازی طاقتین ب اور ج پر عمل کرتے ہین اور مثلث کے ضلعونکو
متناسب ہین تو ان متوازی طاقتونکا مرکز نقل دریافت کرنا ہے

اول فرض کرو کہ طاقتین یک جانبہ ہین ب ج مین ایک نقطہ د ایسا فرض کرو
ب د : د ج :: ج پر عمل کرنیوالے طاقت : ب پر عمل کرنیوالے طاقت یعنی :: اب
اج پس د متوازی طاقتون کا مرکز ہے تو بموجب (شش ۳ م ۶) کے نقطہ د



ایسا ہے کہ ا د زاویہ ب اج کے تنصیف
کرتا ہے ۔ فرض کرو کہ طاقتین مخالفہ ہین
فرض کرو کہ اب بہ نسبت اج کے بڑی ہے
پہلی شکل کی عمل کے موجب ہمین معلوم ہوگا کہ متوازی طاقتونکا مرکزی پر
ب ج خارجہ مین ہے اس طرح ہے کہ خط ای خطوط اج اور ب ا خارجہ کے
زاویہ درمیانی کے تنصیف کرتا ہے بموجب (شش ۱ م ۶) کے مثال دوم
مثلث کے نقاط زوایا پر متوازی طاقتین عمل کرتے ہین اور ہر ایک

طاقت اپنے مقابل کے ضلع کے متناسب ہے تو انکا مرکز ثقل دریافت کرو

اوّل فرض کرو کہ تمام طاقتین یک جانبہ ہین تو پہلی مثال کے بموجب دان متوازی طاقتونکا مرکز ہے جو ب اور ج پر عمل کرتے ہین پس تینون متوازی طاقتونکا مرکز خط ا د مین ہوگا جو زاویہ ب ا ج کو تنصیف کرتا ہے اسیطرح انکا مرکز اوس خط پر منطبق ہوگا۔ جو زاویہ ا ب ج کی تنصیف کرتا ہے اور نیز اوس خط پر جو زاویہ ب ج ا کے تنصیف کرتا ہے پس متوازی طاقتونکا مرکز اوس دایرہ کے مرکز پر منطبق ہوگا جو مثلث ا ب ج کے اندر بنایا جاوے

دوم فرض کرو کہ طاقتین سب یک جانبہ نہین ہین فرض کرو کہ نقاط ب ا د ج پر مخالف طاقتین عمل کرتے ہین اور نقاط ا اور ج پر یک جانبہ پس بموجب عمل مثال اوّل کے تینون متوازی طاقتونکا مرکز اوس خط مین واقع ہوگا جو ج ا اور ب ا خارجہ کے درمیانی زاویہ کے تنصیف کرتا ہے اور نیز اوس خط پر جو زاویہ ا ب ج کے تنصیف کرتا ہے اور نیز اوس خط پر جو ا ج اور ب ج خارجہ کے درمیانی زاویہ کے تنصیف کرتا ہے پس تمام طاقتونکا مرکز اوس دایرہ کے مرکز سے منطبق ہوگا جو ا ج اور ب ا اور ب ج دونون خارجہ کو مس کرتا ہے

دیکھو (تشریح مقالہ ۴)

سوالات نمبر ۸

(۱) ایک جسم پر دو متوازی طاقتین ۳ ط و ۵ ط مخالف سمتون مین عمل کرتے ہین اور اونکے خطوط تحریک کا درمیانی فاصلہ ۶ انچ ہے تو ایک ایسی تیسری طاقت کا مقدار اور خط میلان دریافت کرو جو اوس جسم کو ساکن رکھے

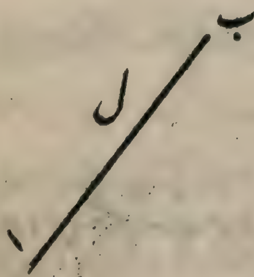
(۲) ایک متوازی الاضلاع کے دو زوایا مقابلہ پر متوازی طاقتین ط اور ق عمل کرتے ہین تو اونکے متوازی طاقتین دریافت کرو جو باقی زاویونپر اسیطرحسے عمل کرین اور چارون متوازی طاقتونکا مرکز متوازی الاضلاع کے وترونکے نقطہ تقاطع کے ساتھہ منطبق ہو (۳) ایک لکڑے بیوزن ایک فٹ لنبی ہے اور اوسکی ایک سری پر دو پونڈ کی طاقت عمل کرتی ہے اور دوسری پر ۴ پونڈکی اور اوسکی نقطہ وسط پر ۶ پونڈکی اور یہہ طاقتین متوازی اور یکجانبہ ہین تو ایک ایسی طاقت کا مقدار اور مقام انفعال دریافت کرو جو اوس لکڑیکو ساکن رکہے (۴) مساوی یکجانبہ متوازی طاقتین ایک مسدس کی پانچ کونونپر عمل کرتے ہین جسکے سب ضلع اور زاویہ آپسمین برابر ہین تو متوازی طاقتونکا مرکز دریافت کرو (۵) یکجانبہ متوازی طاقتین ۷ پونڈ - ۲ پونڈ - ۸ پونڈ - ۹ پونڈ و ۶ پونڈکے ایک خط مستقیم مین مساوی فاصلون پر علی الترتیب عمل کرتے ہین تو اونکا مرکز دریافت کرو (۶) ایک دایرہ کا محیط ن مساوی حصون مین تقسیم کیاہے اور مساوی اور متوازی یکجانبہ طاقتین سواے ایک نقطہ کے کل نقاط تقسیم پر عمل کرتے ہین تو اونکا مرکز دریافت کرو (۷) متوازی یکجانبہ طاقتین ۱-۲-۳ پونڈکے مقدار کے ایک سلاخ پر اوسکے ایک سرسے ۲-۴-۶ انچون کے فاصلونپر عمل کرتے ہین اونکا مرکز دریافت کرو (۸) اب ج ایک مثلث ہی متوازی طاقتین ق و ح نقاط ب و ج پر عمل کرتے ہین اسطرحسے کہ ق : ح :: مس ب : مس ج تو ثابت کرو کہ اونکا مرکز اوس عمود کے عین نیچے ہو گا جو ا سے ب ج پر گرایا جاوے (۹) کسی مثلث اب ج کی نقاط ا و ب و ج پر متوازی طاقتین عمل کرتی ہین اور جداگانہ مس ا و مس ب و مس ج کے متناسب ہین تو ثابت کرو کہ اونکا مرکز اون عمودون کا نقطہ تقاطع ہو گا جو مثلث کے نقاط زوایا سے اضلاع مقابل پر گرائی جاوین

(۱۰) کسی مثلث کی نقاط زوایا پر متوازی طاقتین ط و ق وح عمل کرتے ہین تو ثابت کرو
کہ اونکی مرکز کا ضلع ب ج سے عمود دار فاصلہ = $\frac{ط}{ط+ق+ح} \times \frac{دوچند\ رقبہ\ مثلث}{ب\ ج}$ -
(۱۱) کسی مثلث کی نقاط زوایا ا ب وج سے متوازی طاقتین ط و ق وح عمل کرتے ہین تو ثابت کرو کہ
اونکی مرکز کا فاصلہ ضلع ب ج سے متوازی اب کی = $\frac{ط \times اب}{ط+ق+ح}$ (۱۲) کسی مثلث کی نقاط زوایا
اب وج سے متوازی طاقتین ط و ق وح عمل کرتے ہین تو ایسی طاقتین معلوم کرو جو اضلاع ب ج
وج ا و اب کی نقاط وسط پر عمل کرین اور اونکا مرکز اور حاصل وہی ہو جو پہلی مجموعہ کی ہین -
(۱۳) کسی ذوار بعۃ الاضلاع شکل کی نقاط زوایا ا-ب-ج-د- پر متوازی طاقتین ۳-
و ۵ و ۷ و ۹ پونڈ کے علی الترتیب عمل کرتے ہین تو ثابت کرو کہ مقام مرکز اور مقدار حاصل مین
کچھ فرق واقع نہین ہوگا اگر بجای طاقتون مذکورہ بالا کے اضلاع اب و ب ج وج د و د ا کے
نقاط وسط پر طاقتین ط و ۱۰-ط و ۱۴-ط و ۶-ط پونڈ کے عمل کرین اسجگہ ط کی خواہ کوئی قیمت ہو
(۱۴) کسی مثلث کی نقاط زوایا ا و ب وج پر متوازی طاقتین عمل کرتے ہین اور جداگانہ اَ جم ا
و بَ جم ب وجَ جم ج کے متناسب ہین جہان اَ وغیرہ مثلث کی اضلاع کو تعبیر کرتی ہین تو ثابت کرو
کہ اونکا مرکز اوس دایرہ کی مرکز کے ساتھ منطبق ہوگا (۱۵) کسی مثلث کے نقاط زوایا
ا و ب وج سے متوازی طاقتین ط و ق وح عمل کرتے ہین اور اونکا مرکز وہی تو ثابت کرو کہ
$\frac{ط}{رقبہ\ ب و ج} = \frac{ق}{رقبہ\ ج و ا} = \frac{ح}{رقبہ\ ا و ب}$ (۱۶) متوازی طاقتین ط و ق وح و س نقاط ا ب وج و د پر عمل کرتے ہین
اور $\frac{ط}{رقبہ\ ب ج د} = \frac{ق}{رقبہ\ ج د ا} = \frac{ح}{رقبہ\ د ا ب} = \frac{س}{رقبہ\ ا ب ج}$ تو ثابت کرو کہ اونکا مرکز اج و ب د کا نقطہ
تقاطع ہوگا (۱۷) ایک مکعب شکل کے سات زاویون پر برابر یکجانبہ متوازی طاقتین عمل کرتی
ہین اونکا مرکز معلوم کرو (۱۸) ایک مثلث نما مینار کی نقاط زوایا اب وج و د پر متوازی طاقتین ط و ق
وح و س عمل کرتی ہین تو ثابت کرو کہ سطح ب ج د سے اونکا عمود دار فاصلہ = $\frac{ط}{ط+ق+ح+س} \times \frac{۳\ حجم\ مینار}{رقبہ\ ب ج د}$

باب نہم مرکز ثقل کی بیان مین

(۱۲۲) مرکز ثقل کی تعریف یہہ ہے
ایک جسم یا اجسام کی مجموعہ کا مرکز ثقل وہ نقطہ ہوتا ہے جسپر وہ جسم یا اجسام کا مجموعہ سب حالتونمین اپنے تئین سہار سکے بشرطیکہ وہ نقطہ سہارا جاوے اور اوس جسم یا مجموعہ اجسام پر سواے جذب ثقلی کی اور کوہی طاقت عمل نکرے اور یہہ نقطہ بھی اوس جسم یا مجموعہ اجسام سے جدا ہو

(۱۲۳) دو وزندار ذرّونکا مرکز ثقل دریافت کرو
فرضکرو کہ آ ب دونون ذرّونکی مقام ہین جنکی وزن ط اور ق ہین ا ب کو ملاؤ اور اوسی نقطہ ل پر اسطرحسے تقسیم کرو کہ ال : ل ب = ق : ط تو ل مرکز ثقل ہے ۔ کیونکہ بموجب حد ۶ کی اوزان ط اور ق کا



حاصل نقطہ ل پر عمل کرتا ہے پس اگر نقاط آ اور ب بذریعہ ایک سلاخ بی وزنکی ملحق کئی جاوین تو جب نقطہ ل ٹھرایا جاوے تو ہر حالت مین

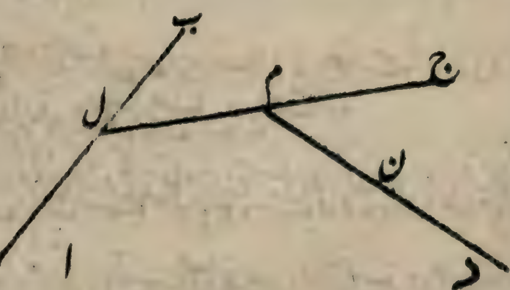
ساکن رہیگا

چونکہ ط اور ق کا حاصل ط + ق ہے پس نقطہ ل پر ط + ق کی برابر دباؤ ہوگا۔

(۱۲۴) دو سے زیادہ وزندار اجسام صغیر کا مرکز ثقل دریافت کرو

فرض کرو کہ آ اور ب اور ج اور د مقامات اجسام ہین وزن جداگانہ ط اور ق اور ح اور س ہین

خط اب کھینچو اور اوسے نقطہ ل پر ایسا تقسیم کرو کہ ال : ل ب :: ق : ط پس ل ط اور ق کا مرکز ثقل ہے جو جداگانہ نقاط آ اور ب پر عمل کرتے ہین



اور دونوںکا وہی اثر ہوتا ہے جو ط + ق نقطہ ل پر پیدا کرتے ہین دیکھو حد (۱۲۲) —

ل کو نقطہ ج سے ملاؤ اور اوسے م پر اسطرح سے تقسیم کرو کہ ل م : م ج :: ح : ط + ق پس م مرکز ثقل ہے ط + ق اور ح کا جو ل اور م پر عمل کرتے ہین اور ان دونوںکا اثر وہی ہوگا

جو ط + ق + ح کا نقطہ م پہ ہے ــــ م دَ کو ملاؤ اور اوسے نقطہ
ن پر اسطرح سے تقسیم کرو کہ م ن : ن دَ : : س : ط + ق + ح پس ن مرکز
ثقل ہے ط + ق + ح کا جو نقطہ م پہ ہے اور س کا جو نقطہ دَ پر ہے
اور ان دونوں کا وہی اثر ہے جو ط + ق + ح + س نقطہ ن پہ ہے
پس نون کل اجسام کا مرکز ثقل ہے کیونکہ کل اوزانکا حاصل نقطہ ن سے
ہوکر گذرتا ہے پس اگر کل اجسام نقطہ ن سے بذریعہ سلاخون کے
ملحق ہون تو کل اجسام ہر ایک حالت مین ساکن ہونگی بشرطیکہ نقطہ ن
سہارا رکھا جاوے

پس ۴ - وزندار اجسام کا مرکز ثقل معلوم ہوگیا اور اسیطرح سے اگر زیادہ
تعداد ہو تو اونکا بھی معلوم ہوسکتا ہے

(۱۲۵) پچھلی حد کی بیان سے معلوم ہوتا ہے کہ وزندار اجسام کی
ہر ایک مجموعہ کا ایک مرکز ثقل ہوتا ہے کیونکہ حد بالا کی تعمیل ہر صورت
مین ہوسکتی ہے

ہمین یہہ بھی معلوم ہوا ہے کہ وزن دار اجسام کی مجموعہ کا حاصل وزن
ہمیشہ مرکز ثقل مین سے ہوکر عمل کرتا ہے پس کل اجسام کی وزنکا اثر وہی
ہوتا ہے گویا کہ تمام وزن مرکز ثقل پر جمع کئی جاوین یہہ نتیجہ مرکز ثقل
کی تعریف مین سے نکلتا ہے

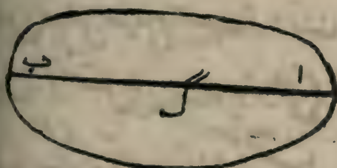
جب ہم کسی جسم یا اجسام کی بابت کہین کہ وہ اپنے مرکز ثقل پر ثابت
رہتا ہے تو ہم ہر دفعہ یہہ نہین کہینگے کہ اوس جسم کے حصے اسمین نہایت ملصق ہین

مگر ہماری ہمیشہ یہی مراد ہوگی

(۱۲۶) ایک جسم یا اجسام کے مجموعہ کا مرکز ثقل ایک سے زیادہ
نہین ہوسکتا۔

اگر ممکن ہو تو فرض کرو کہ ایک جسم یا اجسام کی مجموعہ کی دو مرکز ثقل
گ اور ہ ہین گ اور ہ کو ایک ہی سطح افقی ہین لاؤ پس جبکہ نقطہ گ
سہار رکھا جاوے تو جسم یا اجسام کا مجموعہ قایم رہیگا اور وہ خط جسمین
جسم یا اجسام کا حاصل وزن عمل کرتا ہے گ مین سے ہوکر گذرتا ہے
اسیطرح حاصل وزن نقطہ ہ مین سے ہوکر عمل کرتا ہے پس ایک ہی
خط دو نقطون مین ہوکر گذرتا ہے جو ایک ہی سطح افقی مین ہین اور یہہ ا
بالکل ناممکن ہے پس ایک سے زیادہ مرکز ثقل نہین ہوسکتا

(۱۲۷) اگر ایک جسم یا اجسام کا مجموعہ ایک ہی خط مستقیم پر ہر حال
مین قایم ہے تو اوس جسم یا اجسام کا مرکز ثقل اوسے خط مستقیم مین
فرض کرو کہ اب وہ خط مستقیم
ہے کہ جسپر کوئی جسم یا مجموعہ
اجسام ہر حالت مین قایم رہتا ہے
۔ فرض کرو کہ مرکز ثقل اب مین
نہین ہے بلکہ مرکز ثقل ل ہے



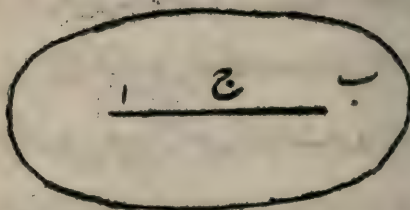
اوس جسم یا اجسام کی مجموعہ کو اسطرحپر رکہو کہ اب خط افقی بنجاوے
نقطہ ل اب سے گذرتی ہوئی سطح راسی مین نہین ہے

فرض کرو کہ اوس جسم یا اجسام کی مجموعہ کی دو نقاط اب پر واقع ہین غیر متغیر ہو جاوین اس سے حالت سکون مین کچھہ خلل واقع نہوگا کیونکہ وہ جسم یا مجموعہ اجسام اب کے گرد بطور محور کی پھر سکتا ہے اور چونکہ وہ ساکن ہے تو مجموعہ اجسام حاصل وزن اب مین سے ہوکر گذریگا بموجب (۱۰) اگر یہ غیر ممکن ہے کیونکہ نہ تو نقطہ ل اب سے راستا اوپر اور نہ نیچی کیطرف ہے۔ پس مرکز خط اب سے باہر نہین ہوسکتا

(۱۲۸) اب ہم دو شکلین لکھتے ہین جو خود عیان ہین مگر اونکا بیان کرنا ضرور ہے۔ اور بعد ازان ہم کئی مساوی شکلون کی اجسام کی مرکز ثقل دریافت کرینگے

(۱۲۹) دھصونکی جنسے ایک جسم یا مجموعہ اجسام بنتا ہے مرکز ثقل معلوم ہین تو کل جسم یا مجموعہ اجسام کا مرکز ثقل دریافت کرو

فرض کرو کہ ا اور ب دونون حصون کے مرکز ثقل ہین اور ط اور ق جدا گانہ حصونکی وزن ہین



اب کو ملاؤ اور اوسی ج پر ایسا تقسیم کرو کہ اج : ج ب :: ق : ط پس ج جسم

یا مجموعہ اجسام کا مرکز ثقل ہے

(۱۳۰) کسی جسم یا مجموعہ اجسام کی ایک حصہ کا مرکز ثقل معلوم ہے اور کل جسم یا اجسام کی مجموعہ کا بھی مرکز ثقل معلوم ہے تو باقی حصہ کا مرکز ثقل معلوم کرو

فرض کرو کہ ا ایک حصہ کا مرکز ثقل ہے اور ج کل کا مرکز ثقل ہے اور ط حصہ کا وزن ہے اور وَ کل کا وزن

اَج کو ملاؤ اور نقطہ ب تک اتنا خارج کرو کہ جَب : اج :: ط : ط ـ وَ

تو ب باقی کا مرکز ثقل ہے

(۱۳۱) ایک خط مستقیم کا مرکز ثقل دریافت کرو

خط مستقیم سے ہمارے مراد اسجگہ ایک ہموار مادہ کا خط مستقیم یعنی ایک باریک سیدھا تار یا سلاخ ہے جسکے موٹائی اور چوڑائے برابر اور نہایت کم ہو

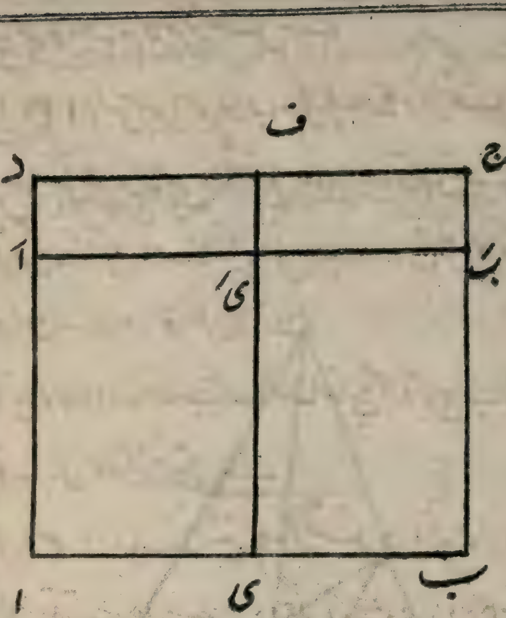
ہر ایک ایسی ہموار خط کا مرکز ثقل اوسکی نقطہ وسط پر ہوتا ہے کیونکہ ہم خط مستقیم کو کسیقدر مساوی جزو صغیروں سے بنا ہوا سمجھہ سکتے ہیں انمیں سے دو دو خط مستقیم کی وسط سے برابر فاصلوں پر ہوں اونکا مرکز ثقل نقطہ وسط پر ہوگا چونکہ یہہ بات ہر ایک اوسیطرح کی دو اجسام صغیر کی واسطے صحیح ہے تو کل خط مستقیم کا مرکز ثقل اوسکے نقطہ وسط پر ہوگا

(۱۳۲) کسی متوازی الاضلاع کا مرکز ثقل دریافت کرو

متوازی اضلاع سے ہمارے مراد ایک ہموار یعنے پتلا مادہ کا ورق ہے جسکی موٹائی برابر اور نہایت کم ہو

فرض کرو کہ اب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے اب کی نقطہ ی پر

تنصیف کرو
اور ج د کی
نقطہ ف پر ی
اور ی ف کو
ملاؤ ایک خط
اَیَ بَ اَیَ
کا متوازی کھنچو
جو اَ دَ یَ ف
اور ب ج کو
جداگانہ نقاط



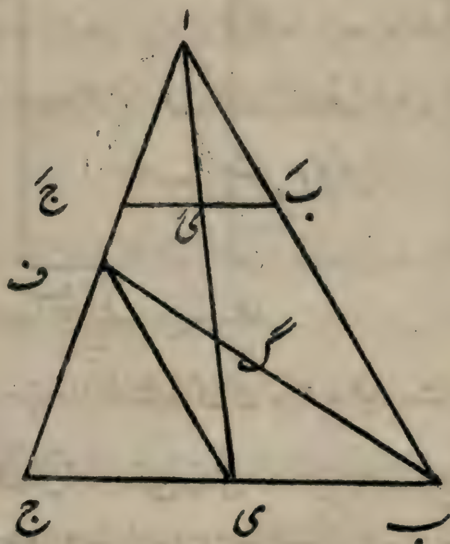
اَیَ بَ پر قطع کرے تو د ف یَ اَ اور ف ج بَ یَ متوازی الاضلاع ہین۔ اسلئے اَیَ = یَ بَ

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع نہایت باریک پٹیون سے بنا ہوا ہے۔ جو خط اَ بَ کی متوازی ہین ہر ایک پٹی کا مرکز ثقل اوسکے نقطہ درمیانی پر ہے بموجب دفعہ (۱۳۱) اور اسلئے خط مستقیم ی ف پر ہے پس متوازی الاضلاع کا مرکز ثقل اوس خط مستقیم پر ہے جو ا د اور ب ج کی نقاط وسط کو وصل کرتا ہے۔ پس متوازی الاضلاع کا مرکز ثقل اون خطوط کے نقطہ تقاطع پر ہے جو اضلاع مقابل کے نقاط وسط کو وصل کرتے ہین۔

(۱۳۳) کسی مثلث کا مرکز ثقل دریافت کرو۔

مثلث سے ہمارے یہان وہی مراد ہے جو پچھلی حد مین متوازی الاضلاع سے تھی

فرض کرو کہ اب ج ایک مثلث ہے ب ج کی نقطہ ی پر تنصیف کرو اور ای کو ملاؤ اور خط بَ یَ جَ ب ی ج کا متوازی سے کہینچو جو خطوط اب و ای و اج کو نقاط بَ یَ جَ پر جدا گانہ قطع کرے



تو بَ یَ / ب ی = ایَ / ای (ش ۴ م ۶) اور اسی طرح سے جَ یَ / ج ی = ایَ / ای ∴ بَ یَ / ب ی

= جَ یَ / ج ی ∴ بَ یَ / جَ یَ = ب ی / ج ی

مگر ب ی = ج ی ∴ بَ یَ = جَ یَ ۔ تو یَ خط بَ جَ کا نقطہ درمیانی ہے

۔ فرض کرو کہ مثلث نہایت باریک پٹیون سے بنا ہوا ہے جو سب

ب ج کی متوازی ہے ہین ہر ایک پٹی کا مرکز ثقل بموجب (۱۳۱) حد کی اوسکی
نقطہ درمیانی پر ہوگا۔ اور اسلیئے خط مستقیم ای مین ہوگا۔
پس مثلث کا مرکز ثقل خط ای مین ہے۔ اسیطرح سے اگر ا ج کے نقطہ ف پر
تنصیف کرین تو مثلث کا مرکز ثقل خط ب ف مین ہوگا
پس مثلث کا مرکز ثقل نقطہ گ پر ہونا چاہیے جو ای اور ب ف کا نقطہ تقاطع ہو
۔ ی ف کو ملاؤ تو ی ف خط ا ب کا متوازی ہوگا بموجب (ش ۲ م ٦)

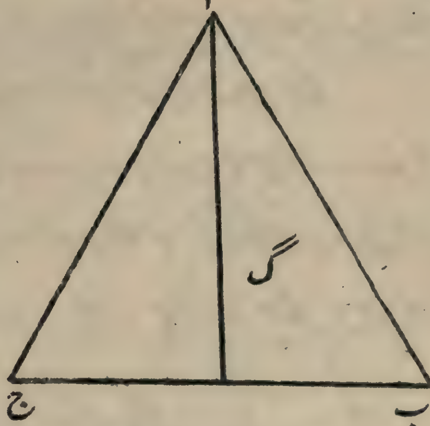
$$\therefore \frac{\text{ی گ}}{\text{ی ف}} = \frac{\text{ا گ}}{\text{ا ب}} \qquad \text{بموجب (ش ۴ م ٦)}$$

$$\therefore \frac{\text{ی گ}}{\text{ا گ}} = \frac{\text{ی ف}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ج ی}}{\text{ج ب}} = \frac{1}{2}$$

پس ا گ ی گ کا دوچند ہے۔ اور اسلیئے ا ی ی گ کا سہ چند ہے یعنی
ی گ ی ا کا تیسرا حصہ ہے
پس مثلث کا مرکز ثقل اس قاعدہ سے معلوم ہو سکتا ہے کہ کسی زاویہ سے
اوسکی مقابل کے ضلع کے نقطہ تنصیف تک خط کھینچو تو مرکز ثقل اس خط مین
ضلع تنصیف شدہ سے بفاصلہ $\frac{1}{3}$ اوس خط کی ہوگا
بیان مفصلہ ذیل صریح ہے مگر اوسپر توجہ کرنا ضرور ہے مثلث کی کسی زاویہ
اَ کو اوسکے مقابل کا ضلع ب ج یا ب ج خارجہ کی کسی نقطہ ل سے ملا ؤ
ل ا مین نقطہ م ایسا لو کہ ل م ل ا کا تیسرا حصہ ہو اور نقطہ م سے ایک خط
ب ج کا متوازی کھینچو تو مثلث کا مرکز ثقل اوس خط مین ہوگا
(۱۳۴) ایک مثلث کا مرکز ثقل تین مساوی وزن ذرات اجسام صغیر کی مرکز

نقل سے منطبق ہوتا ہے جو اوس مثلث کی تینون زاویون پر رکھی ہوئی ہون

- فرض کرو کہ مساوی وزندار جسم صغیر مثلث کی زوایا اب ج پر رکھی ہوئی ہین جو مساوی وزندار جسم صغیر ب اور ج پر ہین اونکا مرکز ثقل ب ج کی



نقطہ درمیانی ی پر ہوگا ای کو ملاؤ اور اوسے نقطہ گ پر تقسیم کرو اسطرحسے کہ اگ : گ ی :: ۲ : ۱ تو گ مرکز ثقل مساوی وزن دار اجسام صغیر کا ہے، جو اوب و ج پر رکھی ہوئی ہین اور گ اوس نقطہ سے منطبق ہوتا ہے جو پہلی حد مین مثلث اب ج کا مرکز ثقل دریافت ہوا تھا

(۱۳۵) کسی مستقیم الاضلاع مستوی شکل کا مرکز ثقل اسطرحسے معلوم ہو سکتا ہے کہ اوس شکل کو مثلثون مین تقسیم کرو اور ہر ایک مثلث کا مرکز ثقل دریافت کرو پھر (۱۲۹) حد کی متواتر عمل سے شکل مفروضہ کا مرکز ثقل دریافت کرو

مثلاً فرض کرو کہ اب ج د ایک شکل ذوار بعۃ الاضلاع ہے وتر د ب کہینچو اور اوسکی نقطہ ی پر تنصیف کرو اور ای اور ج ی کو ملاؤ

ی ہ مساوی ½ ی ا کی لو اور ی ک مساوی ½ ی ج کی لو تو ہ مثلث اب د

کا مرکز ثقل ہے اور ک مثلث ب ج د کا مرکز ثقل ہے

ہ ک کو ملاؤ اور اوسے نقطہ گ پر ایسا تقسیم کرو کہ ہ گ : ک گ :: مثلث ج ب د : مثلث اب د تو گ ذوارتعبہ الاضلاع کا مرکز ثقل ہوگا

وتر اج کھینچو اور فرض کرو کہ و دونوں وترونکا نقطہ تقاطع ہے۔

فرض کرو کہ ہ ک ب د کو نقطہ ل پر قطع کرتا ہے تو مثلث ب ج د : مثلث اب د

:: ج و : او

پس $\frac{\text{ہ گ}}{\text{ک گ}} = \frac{\text{ج و}}{\text{او}} = \frac{\text{ک ل}}{\text{ہ ل}}$ بموجب اصول مثلثات متشابہ کے

پس $\frac{\text{ہ گ}}{\text{ہ گ} + \text{ک گ}} = \frac{\text{ک ل}}{\text{ک ل} + \text{ہ ل}}$ یعنی $\frac{\text{ہ گ}}{\text{ہ ک}} = \frac{\text{ک ل}}{\text{ہ ک}}$ :: ہ گ = ک ل

یہہ گ کی معلوم کرنیکا ایک آسان قاعدہ ہے

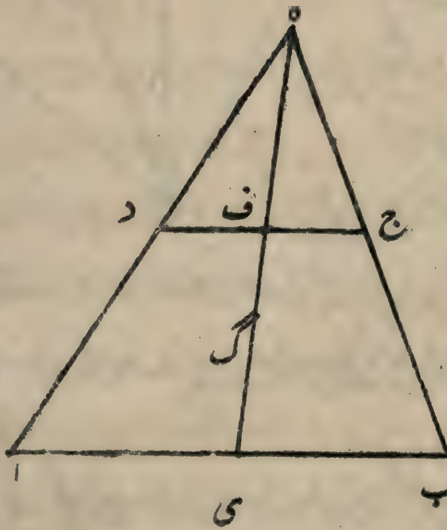
جس صورت میں شکل ذوارتعبہ الاضلاع کی دو ضلع متوازی ہوں تو اد [illegible]

بیان حد آیندہ مین کرتے ہین

(۱۳۶) ایک شکل ذواربعۃ الاضلاع کا جسکے دو ضلع متوازی ہوان مرکز ثقل دریافت کرو

فرض کرو کہ ایک شکل ذواربعۃ الاضلاع اب ج د ہے جسکے اضلاع اب اور ج د متوازی ہین اس شکل کا مرکز ثقل دریافت کرنا ہے

اد اور ب ج کو خارج کرو تا کہ نقطہ ہ پر ملجاوین فرضکرو کہ ی خط ب ا کا نقطہ تنصیف ہے ہ ی کو ملاؤ جو ج د کو نقطہ ف پر قطع ہوگا۔ تو یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ د ف = ف ج اور شکل ذواربعۃ الاضلاع کا مرکز ثقل خط ی ف مین ہے



مثلث ا ہ ب کا مرکز ثقل خط ہ ی مین نقطہ ہ سے بفاصلہ ⅔ ہ ی کی ہے ۔ اور مثلث د ہ ج کا مرکز ثقل ہ ف پر نقطہ ہ سے بفاصلہ ⅔ ہ ف کی ہے ۔

فرض کرو کہ گ ذواربعۃ اضلاع اب ج د کا مرکز ثقل ہے ۔ بموجب حد ۳۰ کے

$$\frac{\text{ہ گ} - \frac{2}{3}\,\text{ہ ی}}{\frac{2}{3}\,\text{ہ ی} - \frac{2}{3}\,\text{ہ ف}} = \frac{\text{رقبہ مثلث د ہ ج}}{\text{رقبہ اب ج د}}$$

بموجب (شکل ۱۹ و ۲ م ۶) کے $\frac{\text{رقبہ د ہ ج}}{\text{رقبہ ا ہ ب}} = \frac{(\text{ہ د})^2}{(\text{ہ ا})^2} = \frac{(\text{ہ ف})^2}{(\text{ہ ی})^2}$ اسلئے

$\frac{\text{ہ گ} - \frac{2}{3}\,\text{ہ ی}}{\text{ہ گ} - \frac{2}{3}\,\text{ہ ف}} = \frac{(\text{ہ ف})^2}{(\text{ہ ی})^2}$ پس $\text{ہ گ} = \frac{2}{3} \times \frac{(\text{ہ ی})^3 - (\text{ہ ف})^3}{(\text{ہ ی})^2 - (\text{ہ ف})^2}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{(\text{ہ ی})^2 + \text{ہ ی} \times \text{ہ ف} + (\text{ہ ف})^2}{\text{ہ ی} + \text{ہ ف}}$

اسلئے $\text{ف گ} = \frac{2}{3} \times \frac{(\text{ہ ی})^2 + \text{ہ ی} \times \text{ہ ف} + (\text{ہ ف})^2}{\text{ہ ی} + \text{ہ ف}} - \text{ہ ف} = \frac{2(\text{ہ ی})^2 - \text{ہ ی} \times \text{ہ ف} - (\text{ہ ف})^2}{3(\text{ہ ی} + \text{ہ ف})}$

$= \frac{(\text{ہ ی} - \text{ہ ف})(2\,\text{ہ ی} + \text{ہ ف})}{3(\text{ہ ی} + \text{ہ ف})} = \frac{\text{ف ی}}{3} \times \frac{2\,\text{ہ ی} + \text{ہ ف}}{\text{ہ ی} + \text{ہ ف}}$ چونکہ

$\frac{\text{ہ ف}}{\text{ہ ی}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ا ب}}$ پس $\frac{2\,\text{ہ ی} + \text{ہ ف}}{\text{ہ ی} + \text{ہ ف}} = \frac{2\,\text{ا ب} + \text{ج د}}{\text{ا ب} + \text{ج د}}$

پس $\text{ف گ} = \frac{\text{ف ی}}{3} \times \frac{2\,\text{ا ب} + \text{ج د}}{\text{ا ب} + \text{ج د}}$

اسطرحسے ف گ کی قیمت جب کہ دونون متوازی ضلعون کی طول اور اونکی نقطۂ درمیانی کی فاصلہ کی قیمتین معلوم ہون معلوم ہوسکتی ہے -

(۱۳۷) ایک مثلّث نما مینار کا مرکز ثقل دریافت کرو

فرض کرو کہ ا ب ج قاعدہ ہے اور دؔ نقطہ راس ہے ا ج کی نقطہ ی پر تنصیف کرو ب ی اور د ی کو وصل کرو ب ی مین نقطہ ف ایسا لو کہ ی ف = $\frac{1}{3}$ ی ب کی ہو پس ف مثلث ا ب ج کا مرکز ثقل ہے ف د کو وصل کرو د ب مین کسی نقطہ بؔ سے بؔ آ اور بؔ جؔ جداگانہ ب ا اور ب ج

کی متوازی کھینچو

فرض کرو کہ خط د ف سطح اَ بَ جَ کو نقطہ فَ پر قطع کرتا ہے - بَ فَ کو ملاؤ اور اوسے خارج کرو تاکہ د ی سے نقطہ ی پر ملے

پس بموجب اصول مشابہ مثلثوں کے اَ یَ = یَ جَ

نیز بَ فَ / ب ف = دَ فَ / د ف = یَ فَ / ی ف

پس بَ فَ / یَ فَ = ب ف / ی ف

لیکن ب ف ی ف سے دو چند ہے پس بَ فَ بھی یَ فَ سے دو چند ہوا اور اسلئے فَ مثلث اَ بَ جَ کا مرکز ثقل ہے

فرض کرو کہ منیار نہایت باریک پٹیوں کا جو اب ج کی متوازی ہیں بنا ہوا ہے تو بموجب ثبوت بالا ہر ایک پٹی کا مرکز ثقل خط د ف پر ہوگا - پس منیار کا مرکز ثقل خط د ف پر ہے

پھر ی د میں نقطہ ہ ایسا لو کہ ی ہ = ½ ی د کے اور ب ہ کو ملاؤ تو طریقہ اوّل کی طرح مینار کا مرکز ثقل خط ب ہ میں ہوگا

پس منیار کا مرکز ثقل ب ہ اور د ف کا نقطہ تقاطع گ پر ہونا چاہیئے -

ف ہ کو ملاؤ تو ف ہ ب د کا متوازی ہوگا بموجب (ش ۲ م ۶) کے

اسلئے ہ گ / ہ ف = ب گ / ب د بموجب (ش ۴ م ۱۱) کے

پس ہ گ / ب گ = ہ ف / ب د = ی ف / ی ب = ⅓

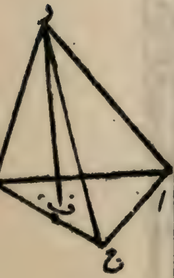
پس ب گ ہ گ کا سہ چند ہے

اور اسلئے ب ہ ہ گ کا ۴ گنا ہے یعنے ہ گ ب ہ کا چوتہا حصہ ہے

پس مثلث نما مینار کا مرکز ثقل اس قاعدہ سے دریافت ہو سکتا ہے
کسی نقطہ زاویہ کو مقابل کی پہل کے مرکز ثقل سے ملاؤ تو مینار کا مرکز ثقل اس
خط پر اوس پہل سے اس خط کے ¼ طول کے فاصلہ پر ہوگا

بیان مفصلہ ذیل صریح ہے
ایک مثلث نما مینار کے نقطہ راس د کو مقابل کی پہل اب ج کی سطح مین
کسی نقطہ ل سے ملاؤ اور ل د مین نقطہ م ایسا لو کہ ل م ل د کا ¼ ہو اور م سے
ایک سطح اب ج کی متوازی کھینچو تو مینار کا مرکز ثقل اس سطح
مین ہوگا

(۱۳۸) ایک مثلث نما مینار کا مرکز ثقل چار مساوی وزندار اجسام صغیر کی
مرکز ثقل سے منطبق ہوتا ہے جو اوس مینار کے نقاط زوایا پر رکھے جاوین
فرض کرو کہ مساوی وزندار اجسام صغیر مینار اب ج د کی نقاط زوایا پر
رکھے ہوئے ہین



جو وزندار اجسام صغیر اب اور ج پر رکھے ہین اونکا مرکز ثقل نقطہ ف پر
ہوگا جو مثلث اب ج کی مرکز ثقل سے منطبق ہوتا ہے بموجب حد (۱۳۴)
- جو مساوی اوزان اب اوج پر ہین اونکا وہی اثر ہے جتنا کہ نقطہ ف پر
ایک تگنی وزنکا۔ د ف کو ملاؤ اور اوسی نقطہ گ پر تقسیم کرو اسطرح سے کہ
د گ : گ ف : : ۳ : ۱ پس گ مرکز ثقل ہے مساوی اجسام صغیر کا جو اب ج
اور د پر ہین اور گ اوس نقطہ سے منطبق ہوتا ہے جو حد مذکورہ بالا مین مینار
اب ج د کا مرکز ثقل دریافت ہوا

(۱۳۹) ایک ایسی مینار کا مرکز ثقل دریافت کرو جسکا قاعدہ کثیر الاضلاع مستقیمہ سطح ہو

یہہ منیار مثلث نما میناروںمین تقسیم ہو سکتا ہے اسطرح سے کہ اسکے قاعدہ کے کسی نقطہ سے تمام نقاط زوایا تک اور مینار کی نقطہ راس تک خط کھینچے جاوین تو ان مثلث نما میناروں مین سے ہر ایک کا مرکز ثقل اوس سطح مین ہوگا جو قاعدہ کی متوازی ہے اور نقطہ راس سے قاعدہ کی $\frac{1}{4}$ فاصلہ پر پس کل مینار کا مرکز ثقل اوسی سطح مین ہوگا

فرض کرو کہ منیار قاعدہ کی متوازی نہایت باریک پٹیوں کا بنا ہوا ہے تو بموجب حد (۱۳۷) کے ثابت ہو سکتا ہے کہ ہر ایک پٹی کا مرکز ثقل اوس خط مین ہوگا جو مینار کے قاعدہ کی مرکز ثقل کو اوسکی نقطہ راس سے وصل کرتا ہے پس منیار کا مرکز ثقل اسخط پر ہوگا پس کل مینار کا مرکز ثقل اوسخط مستقیم پر ہوگا جو اوسکی قاعدہ کی مرکز ثقل کو اوسکی نقطہ راس سے وصل کرتا ہے اور قاعدہ سے اسخط کی $\frac{1}{4}$ طول کی فاصلہ پر ہوگا

(۱۴۰) ایک مخروط کا مرکز ثقل دریافت کرو

مخروط کو ہم اسطرحکا منیار تصور کرتے ہین جسکا قاعدہ بی انتہا تعداد ضلعوں کا کثیر الاضلاع ہو

پس جو نتیجہ حد (۱۳۹) مین منیار کے واسطے حاصل ہوا ہے وہی مخروط کیواسطے درست ہے ــ پس مخروط کا مرکز ثقل اوسخط مستقیم مین ہوگا جو مخروط کے نقطہ راس کو اوسکے قاعدہ کے مرکز ثقل سے وصل کرتا ہے اور قاعدہ

سے اس خط کی ۱/۴ طول کی فاصلہ پر ہو گا

(۱۴۱) ایک اصول جسی اصول ترتیب کھنا چاہیے کسی مرکز ثقل دریافت کرنیکے لئے مدد دیتا ہے

ایک جسم کو کسی ایک سطح کے لحاظ سے مرتّب کہتے ہین جبکہ وہ جسم ہم مقدار اور ہموزن اجسام صغیرہ کے جفتون کا بنا ہوا ہو جنمین سے ہر ایک جفت اوس سطح کے مخالف سمتون مین اوس سے مساوی فاصلون پر اور اوس کی ایک ہی عمود پر واقع ہو اگر کوی جسم کسی سطح کے لحاظ سے مرتب ہو تو اوسکا مرکز ثقل اوسی سطح مین ہو گا کیونکہ اون دو حصونکی وزن جنمین یہہ سطح اوس جسم کو منقسم کرتے ہین برابر ہین اور اونکے مرکز ثقل اوس سطح کے مخالف سمتون مین اور اوس سے مساوی فاصلون پر ہین اسلئے کل جسم کا مرکز ثقل اوس سطح مین ہو گا دیکھو حد (۱۲۹)

(۱۴۲) اگر ایک جسم دو سطحون پر سے ہر ایک کے لحاظ سے مرتب ہو تو مرکز ثقل ہر ایک سطح مین ہو گا - اور اسلئے اونکی خط تقاطع مین ہو گا - اگر جسم ایک تیسری سطح کے لحاظ سے بہی مرتب ہو تو مرکز ثقل اس سطح مین ہو گا - اگر یہہ تینون سطح ایک دوسرے کو ایک خط مشترک پر قطع نہین کرتین تو ایک نقطہ پر ملینگی اور یہہ نقطہ اسلیئے جسم کا مرکز ثقل ہو گا

مثلاً ایک کرہ لو تو جو سطح اوسکے مرکز مین سے ہو کر گذرتی ہے اوسکو مرتب طور پر تقسیم کرتی ہے پس کرہ کا مرکز ثقل ہر ایک سطح مین ہے پس کرہ کا مرکز ہی اوسکا مرکز ثقل ہے

(۱۴۳) متوازی طاقتون کے مرکز کے بابت جو شکلین حدود ۱۲۴ سے
(۱۲۹) تک لکھی گئی ہین وہ مرکز ثقل کے بابت بھی عمل در آمد ہین صرف اس
استفسار سے کہ اجسام صغیر کے اوزان یک جانبہ متوازی طاقتین ہوتی ہین
اسجگہہ ان شکلونکو ہم دوبارہ لکھتے ہین

(۱۴۴) دو وزندار اجسام صغیر کے ایک خط مستقیم سے فاصلی معلوم ہین
تو اونکی مرکز ثقل کا فاصلہ اوس خط سے معلوم
کرنا ہے - خط مستقیم اور اجسام صغیر سب ایک ہی سطح مین واقع ہین

فرض کرو کہ آ اور بَ اجسام صغیر کے موقف ہین اور ط اور ق اونکی وزن ہین
اب کو ملاؤ اور اوسے نقطہ ج پر تقسیم کرو اسطرح سے کہ اج : ج ب :: ق : ط
پس ج اجسام صغیر کا مرکز ثقل ہوگا

فرض کرو کہ اد ب ی ج ف نقاط اب ج سے عمود کسی خط پر گرائی گئی ہین جو
اوسی سطح مین ہے جسمین نقاط آ اور بَ ہین

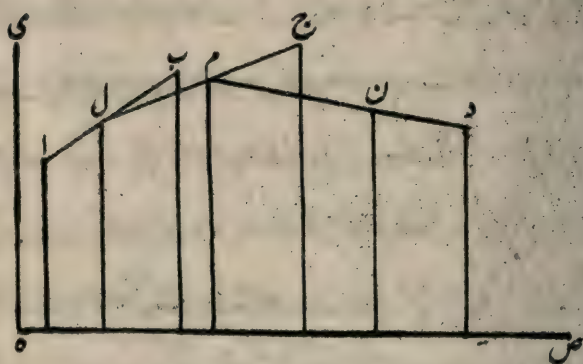
فرض کرو کہ اد = طَ اور ب ی = قَ اور ج ف = حَ یہان ط اور ق کی
قیمتین معلوم ہین اور حَ کے قیمت دریافت کرنی
ہے نقطہ ج مین سے اج بَ د ف ی کا متوازی کھینچو
جو اود ب ی سے نقاط اب پر ملے تو

$$\frac{\text{ج ب}}{\text{ج ا}} = \frac{\text{ب بَ}}{\text{ا اَ}}$$ بموجب (شش ۴م ۲) کے

$$\therefore \frac{\text{ط}}{\text{ق}} = \frac{\text{ب بَ}}{\text{ا اَ}} = \frac{\text{ب ی - ی بَ}}{\text{د ا - د ا}} = \frac{\text{قَ - حَ}}{\text{حَ - طَ}} \therefore \text{ط (حَ - طَ) = ق (قَ - حَ)}$$

$$\therefore \text{(ط + ق) حَ = ططَ + ققَ - پس حَ} = \frac{\text{ططَ + ققَ}}{\text{ط + ق}}$$

(۱۴۵) کسقیدر اجسام صغیر کے فاصلے ایک سطح مین کسی خط سے جو اوسی سطح مین ہے معلوم ہین تو اوس خط سے اونکے مرکز ثقل کا فاصلہ معلوم کرو



فرض کرو کہ ا ب ج د اجسام صغیر کے موقف ہین جنکے وزن ط ق ح س ہین فرضکرو کہ طَ قَ حَ سَ جدا گانہ نقاط ا ب ج د کے ایک خط مستقیم ہ ص سے جو اوسی سطح مین ہے فاصلے ہین ۔ ا ب کو ملاؤ اور اوسکو نقطہ ل پر تقسیم کرو اسطرحسے کہ ا ل : ل ب : : ق : ط پس ل مرکز ثقل ہے ط اور ق کا جو ا اور ب پر رکھی ہوئے ہین اور ان وزنونکا وہی اثر ہے جو ط + ق کا نقطہ ل پر ہے

فرض کرو کہ لَ نقطہ ل کا ہ ص سے فاصلہ ہے تو بموجب حد (۱۴۴)

لَ = (ط طَ + ق قَ) / (ط + ق) ل ج کو ملاؤ اور اوسی نقطہ م پر تقسیم کرو اسطرحسے کہ ل م : م ج : : ج : ط + ق پس م مرکز ثقل ہے ط + ق کا جو نقطہ ل پر ہے اور ح کا جو نقطہ ج پر ہے اور اون وزنونکا وہی اثر ہوگا جو ط + ق + ح کا نقطہ م پر ہے

فرض کرو کہ مَ نقطہ م کا ہ ص سے فاصلہ ہے تو مَ = (ط + ق) اَ + ح حَ ÷ (ط + ق + ح)

= (ط طَ + ق قَ + ح حَ) ÷ (ط + ق + ح)   م د کو ملاؤ اور اوسکو نقطہ

ن پر تقسیم کرو اسطرح سے کہ م ن : ن د : : س : ط + ق + ح پس ن مرکز ثقل ہے ط + ق + ح کا جو نقطہ م پر اور س کا جو نقطہ د پر ہے اور ان وزنونکا وہی اثر ہے جو ط + ق + ج + س نقطہ ن پر کرتا ہے

فرض کرو کہ نَ نقطہ ن کا ہ ص سے فاصلہ ہے

نَ = ((ط + ق + ح) مَ + س سَ) ÷ (ط + ق + ح + س) = (ط طَ + ق قَ + ح حَ + س سَ) ÷ (ط + ق + ح + س)

پس ہمین چار وزندار اجسام صغیر کے مرکز ثقل کا فاصلہ ہ ص سے معلوم ہوگیا

اسطرح سے اگر تعداد زیادہ ہو تو بھی معلوم کرسکتی ہین

(۱۴۶) اسیطرح سے اگر نقاط ا ب ج د کا فاصلہ اوسی سطح مین ایک دوسرے خط ہ ی سے معلوم ہو۔ تو ہم اوزان کے مرکز ثقل کا فاصلہ اوس خط مستقیم سے معلوم کرسکتے ہین

اور جب ہمین مرکز ثقل کا فاصلہ اوس سطح مین دو خطوط سے معلوم ہوگیا تو ہم مرکز ثقل کا مقام بھی معلوم کرسکتے ہین کیونکہ وہ اون دونون خطوط کے نقطہ تقاطع پر ہوگا جو ہ ص اور ہ ی کی متوازی اور اون سے جداگانہ دریافت شدہ فاصلون پر ہون

اس ثبوت کو ہم اوس صورت مین بھی عمل مین لاسکتے ہین جب وزندار اجسام کل ایک ہی سطح مین نہون دیکھو حد (۱۱۹)

سوالات نمبر (۹)

(۱) اگر دو مثلث ایک ہی قاعدہ پر واقع ہون تو ثابت کرو کہ جو خط مستقیم اونکے مراکز ثقل کو وصل کرتا ہے اوس خط کا متوازی ہوگا جو اونکے نقاط راس کو وصل کرتا ہے

(۲) ایک سلاخ ۳ فٹ طول مین اور ۴ پونڈ وزن کی ہے اوسکے ایک سری پر ایک مثلث کے ایک چوتھائی ایک خط مستقیم سے جو ایک ضلع کے متوازی ہے قطع کی گئی ہے تو باقی حصہ کا مرکز ثقل دریافت کرو

(۴) ایک ہموار مدور تختی کا مرکز ثقل دریافت کرو جسمین سے ایک چھوٹا مدور تختہ جسکا قطر بڑی دایرہ کے نصف قطر کے برابر ہے کاٹ لیا گیا ہے

(۵) اگر تین آدمی ایک وزندار مثلث نما تختہ کو اوسکے تینون کونون پر سے اوٹھائی ہوئے ہون تو بتاؤ کہ ایک آدمیکو کسقدر طاقت لگانی پڑیگی

(۶) اگر ایک تار مثلث کے شکل مین جہکائی جاوے تو ثابت کرو کہ اوسکا مرکز ثقل اوس دایرہ کے مرکز ثقل سے منطبق ہوگا جو اوس مثلث کے اندر کہنچا جاوے جو اصلی مثلث کے اضلاع کے نقاط وسط کو ملانی سے پیدا ہوتا ہے

(۷) اگر ایک مثلث کا مرکز ثقل اوس مثلث کی دو زاویون سے برابر فاصلون پر ہو تو ثابت کرو کہ مثلث مساوی الساقین ہوگا

(۸) اگر مثلث کی کسی زاویہ سے اوسکی مرکز ثقل سے گذرتا ہوا ایک خط کہنچا جاوے اور مقابل کے ضلع پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ وہ مثلث مساوی الساقین ہوگا

(۹) ایک مثلث ا ب ج کی اضلاع ا ب اور ب ج باہم مساوی ہین اوسمین سے ایک حصہ ا پ ج علیحدہ کیا گیا ہے اسطرح سے کہ ا پ اور پ ج باہم برابر ہین تو ا ج سے نقاط ب اور پ کے فاصلو مین کیا نسبت ہونی چاہیے تاکہ باقی کا مرکز

ثقل نقطہ پ پر ہو

(۱۰) ایک وزندار سلاخ ۱۴ فٹ طول مین ایک قایمۃ الزاویہ کی شکل مین موڑا گیا ہے اور اون دونون حصونکی لنبائی جو زاویہ قایمہ بناتی ہین جداگانہ ۸ اور ۶ فٹ ہے تو ثابت کرو کہ اسطرح موڑی ہوئے سلاخ کے مرکز ثقل کا فاصلہ اوس نقطہ سے جو سیدہی سلاخ کا مرکز ثقل تھا $\frac{\sqrt{۶۹}}{۷}$ فٹ ہوگا

(۱۱) اگر تین وزندار اجسام صغیرہ کا مرکز ثقل جو ایک مثلث کی راس مرکز ثقل سے منطبق ہو تو تین اجسام برابر وزنکے ہونگے

(۱۲) دو مساوی ہموار زنجیر ایک سیدہی سلاخ بیوزن کے سرونسے لٹکائی گئی ہین اور یہہ سلاخ اپنے نقطہ درمیانی پر گہوم سکتی ہے تو ان طاقتونکا مرکز ثقل دریافت کرو اور ثابت کرو کہ نتیجہ اس زاویہ سے بی تعلق ہے جو وہ سلاخ افق سے بناتی ہے

(۱۳) ایک مربع کے اضلاع متصلہ کے نقاط درمیانی وصل کی گئی ہین اور جو مثلث اسخط اور مربع کے کنارونسے نبتا ہے قطع کیا گیا ہے تو باقی مربع کا مرکز ثقل دریافت کرو

(۱۴) اگر ن مساوی وزن ایک خط افقی سے علیحدہ علیحدہ ڈوروںکے ذریعہ سے لٹکائی جاوین اور ہر ایک ڈور کا طول ل ہو تو کل وزنونکا مرکز ثقل کا فاصلہ اوس خط سے معلوم کرو

(۱۵) اگر ایک مثلث کے ضلع ۳ و ۴ و ۵ فٹ ہون تو ہر ایک ضلع سے اوسکی مرکز ثقل کا فاصلہ دریافت کرو

(۱۶) ایک ہموار تار کاٹ کر مثلث مساوی الساقین کی صورت کا ہے
مساوی الاضلاع مین سے ہر ایک ۵ فٹ ہے اور تیسرا ضلع ۸ فٹ ہے تو
اوسکا مرکز ثقل دریافت کرو

(۱۷) ایک شکل کا مرکز ثقل دریافت کرو کہ جسمین ایک مثلث مساوی الاضلاع
ہے اور ایک مربع اور مثلث کا قاعدہ مربع کے ایک ضلع سے منطبق
ہوتا ہے

(۱۸) دو سیدہی سلاخین بی وزن چار چار فٹ طول ہین اور اونپر ۱-۳
-۵-۷-۹ پونڈ کے وزن ترتیب وار ایک ایک فٹ کے فاصلہ پر رکھی ہوئی
ہین تو بتلاؤ کہ ایک سلاخ کو دوسرے سلاخ پر کسطرح رکھین کہ دونون سلاخین دوسری سلاخ کے
نقطہ درمیانی پر ساکن بطور حامل کے رہین

(۱۹) ایک ہموار مٹائی کا سلاخ مساوی طول کے تین اشیا کا بنا ہوا ہے جنکی حجم
ترتیب وار ۱ و ۲ و ۳ کے نسبت رکھتی ہین تو سلاخ کا مرکز ثقل دریافت کرو

(۲۰) ایک میز کے بالائے سطح ایک قایم الزاویہ مثلث متساوی الساقین
کے شکل کے ہے اور اوسکا ہر ایک مساوی ضلع تین فٹ لنبائی اور وہ میز
تین راسی پایوں سے جو اوسکے کونو پر رکہے ہوئے ہین قایم ہے
ایک ۲۰ پونڈ کا وزن میز کے اوپر اوسکے ایک مساوی ضلع سے
۱۰ انچ کے فاصلہ پر رکہا ہوا ہے تو ہر ایک پایہ پر کتنا بوجہ پڑیگا

باب دہم

مرکز ثقل کے خواص

(۱۴۷) اگر ایک جسم کسی نقطہ سے لٹکایا جاوے جسکے گرد وہ آزادی سے
گھوم سکے تو وہ ساکن نہین رہیگا جب تک کہ اوسکا مرکز ثقل اوس خط راس مین
نہو جو نقطہ تعلیق مین سے ہوکر گذرتا ہے۔
کیونکہ اس جسم پر دو طاقتین عمل کرتے ہین ایک اوسکا اپنا وزن مرکز ثقل
مین سے سمت راس مین اور دوسرے وہ طاقت جو نقطہ معین سے پیدا ہوتی
ہے۔ جب تک کہ یہہ دونون طاقتین مساوی اور مخالف نہو نگی تب تک جسم ساکن
نہوگا اسواسطے مرکز ثقل اوس خط راس مین ہونا چاہیے جو نقطہ تعلیق مین
سے ہوکر گذرتا ہے
(۱۴۸) پچہلی حد سے ایک جسم کے مرکز ثقل کے دریافت کرنیکا ایک مجرب
طریقہ معلوم ہوتا ہے اور وہ یہہ ہے کہ اول ایک جسم کو کسی نقطہ سے لٹکاؤ جسکے گرد
وہ بغیر روک کے گھوم سکے اور اس نقطہ تعلیق سے خط راس کے سمت دریافت
کرو پہر اوسی جسم کو کسی دوسری نقطہ سے لٹکاؤ اول حالت سے مختلف حالت مین
لٹکتا ہو اور اس نقطہ تعلیق سے خط راس کے سمت دریافت کرو

تو اس جسم کا مرکز ثقل اون دونون خطوط معینہ سے ہر ایک مین ہے پس اونکی نقطہ تقاطع ج پر ہوگا

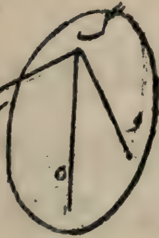
(۱۴۹) اگر ایک جسم کسی محور کی گرد جو کہ سمت راس مین نہین ہے بی روک گہوم سکے تو وہ ساکن رہیگا۔ جب تک کہ اوسکا مرکز ثقل اوس سطح راس مین نہو جو محور مین سے گذرتی ہے

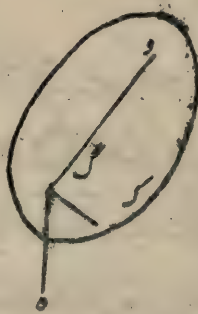
جسم کا وزن اوسکے مرکز ثقل پر عمل کرتا فرض کیا جا سکتا ہے۔ اوسکو دو اجزاء مین منفصل کرو جو کہ باہم عمود دار ہون اور ایک جزو محور کے متوازی ہو تو یہہ جزو جو محور کے متوازی ہے نہ تو محور کی گرد حرکت پیدا کریگے اور نہ حرکت کو روکیگے لیکن دوسری جزو جسم کو محور کی گرد حرکت دیگی جب تک کہ اوسکا مرکز ثقل اوس سطح راس مین نہو جو محور مین سے ہوکر گذرتے ہو

(۱۵۰) ایک جسم جو کسی نقطہ غیر منتقل سے بذریعہ ایک ڈوری کے لٹکا ہوا ہو ساکن نہین رہ سکتا جب تک کہ اوس کا مرکز ثقل اس نقطہ سے نیچے کیطرف نہو جس سے وہ لٹکا ہوا ہے

لیکن اگر نقطہ غیر منتقل ایسا ہے کہ اوس جسم کا ہے ایک حصہ ہے اور وہ جسم اوسکے گرد گہوم سکتا ہے تو وہ ساکن رہ سکتا ہے خواہ اوسکا مرکز ثقل نقطہ سے سمت راس مین اوپر کیطرف یا نیچے کیطرف ہو اور اوسیطرح سے اگر کوئی جسم ایک غیر منتقل محور کے گرد گہوم سکتا ہے جو کہ راس سے نہین ہے تو وہ بہی ساکن رہ سکتا ہے خواہ اوسکا مرکز ثقل محور سے اوپر کیطرف ہو خواہ نیچے کیطرف سکون کی ان دو حالتون مین بہت فرق ہے جو اشکال مندرجہ ذیل سے معلوم ہوگا

(۱۵۱) اگر ایک جسم جو کسی نقطہ غیر منتقل کے گرد بلا روک گھوم سکتا ہے ساکن ہو اور اوسی ذرا سا تحریک کرین اگر اوسکا مرکز ثقل اوس نقطہ سے نیچے کیطرف ہو تو وہ اپنے اصلی حالت سکون مین آ جاویگا اور اگر مرکز ثقل نقطہ سے اوپر کیطرف ہے تو اصلی حالت سکون سے ہٹتا جاویگا یہہ امر بالکل تجربہ سے تعلق رکھتا ہے مگر اوسکا ثبوت بہی اسطرح ہو سکتا ہے - فرض کرو کہ د نقطہ غیر منتقل ہے اور گ جسم کا مرکز ثقل ہے گ ہ نیچے کیطرف سمت راس مین کہینچو تو جسم کا وزن گ ہ کے سمت مین عمل کرتا ہے اوسکو دو اجزا علی القوایم مین





منفصل کرو ایک جزو اوس خط کی سمت مین جو مرکز ثقل کو نقطہ معین سے وصل کرتا ہے

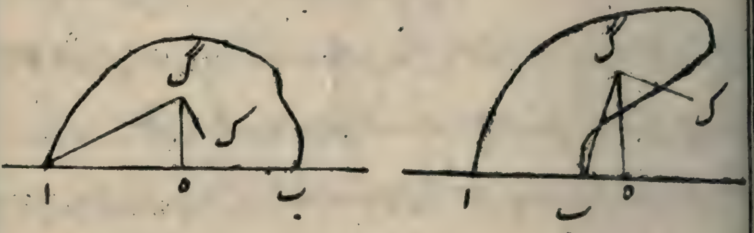
اور فرض کرو کہ گ ک دوسری جزو کے سمت ہے

جبکہ گ نقطہ د سے اوپر ہے تو پہلا جزو گ و کے سمت مین عمل کرتا ہے اور دوسرا یعنی گ ک ظاہرا جسم کو اوس حالت سے ہٹا لیجانی پر مایل ہے جسمین کہ گ د سے راسا اوپر کیطرف ہے جبکہ گ ہ سے قریبًا نیچے کیطرف ہے تو پہلا جزو و گ کے سمت مین عمل کرتا ہے اور دوسرا جزو گ ک ظاہرا جسم کو اوس حالت کیطرف لاتا ہے جسمین کہ گ سمت راس مین د سے نیچے کیطرف ہے

(۱۵۲) اگر ایک جسم کسی سطح افقی پر رکھا جاوے اور وہ خط راسی جو

اوسکے مرکز ثقل مین سے گذرتا ہے قاعدہ کے اندر واقع ہو تو جسم کھڑا رہیگا اور اگر قاعدہ کے باہر دریغ ہو تو گرجائیگا

فرض کرو کہ گ جسم کا مرکز ثقل ہے اور خط را سے جو گ مین سے گذرتا ہے سطح افق کو جسپر کہ جسم کھڑا ہوا ہے نقطہ ہ پر قطع کرتا ہے نقطہ ہ مین سے ایک خط افقی کہنچو اور فرض کرو کہ



اب اوسکا وہ حصہ ہے جو جسم مفروضہ کے قاعدہ کے اندر واقع ہے۔

اول فرض کرو کہ نقطہ ہ ا اور ب کے درمیان واقع ہے

نقطہ ا کے گرد کچھہ حرکت نہین ہو سکتی کیونکہ جسم کا وزن نقطہ گ سے نیچے کیطرف سمت را اس مین عمل کرتا ہے اور اوسکو دو اجزا مین منفصل کر سکتے ہین ایک گ ا کے سمت مین دوسری گ ا پر عمود دار سمت مین پہلا جزو ا کے گرد حرکت پیدا نہین کر سکتا دوسرا جزو گ کو ا کے گرد گ ک کے سمت مین گہمانیکے قابل ہے مگر اس حرکت کو وہ سطح جسپر کہ جسم قایم ہے روکتی ہے

اسیطرح سے نقطہ ب کے گرد بہی کچھہ حرکت نہین ہو سکتی ہے پس جسم نہ ا کیطرف گر سکتا اور نہ ب کے طرف

پھر فرض کرو کہ ہ ا اور ب کے درمیان نہین ہے بلکہ اب نقطہ ب کیطرف

خارج شدہ پر ہے

توجسطرح پہلے ثبوت ہوا ہے نقطہ ا کے گرد کچہہ حرکت نہین ہوگی لیکن نقطہ ب کے گرد حرکت واقع ہوگی کیونکہ وزن کے اوس جزو کی قابلیت جوگ ب پر عمود دار ہے یہہ ہوگی کہ نقطہ گ کو ب کے گرد گ ک کے سمت مین حرکت دی اور اس حرکت کے روکنی کو کوی چیز نہین ہے پس جسم گر پڑیگا

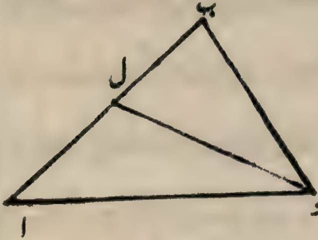
(۱۵۳) جن معنون مین لفظ قاعدہ پہلی حد مین استعمال ہوا ہے اوسکی تشریح ضرور ہے۔ سطح کی وہ حصی جو جسم مفروضہ اور سطح افقی مین مشترک ہین وہ یا تو ایک کامل رقبہ ہوتا ہے یا مختلف رقبون مین مشتمل ہوتا ہے مثلاً ایک اینٹ جو ہموار سطح افقی پر رکہی ہوئے ہو پہلے صورت کے مثال ہے اور ایک کرسی دوسری صورت کی مثال ہے علاوہ اسکے یہہ رقبی نہایت چھوٹی ہوسکتی ہین یعنی نقطونکے برابر ہوسکتے ہین

پہلی حد کیواسطی قاعدہ کی حدود اسطرح دریافت ہوسکتے ہین نقاط مماس کی درمیان خط وصل کرو اسنی شکل کثیر الاضلاع بنیگی جسمین کہ تمام نقاط مماس آجائینگے لیکن کوی زاویہ دو قایمون سے بڑا نہو دیکہو تشریح اشس ۲ ۳ م ۱)

(۱۵۴) کسی نقطہ سے کسیقدر وزندار اجسام صغیر تک خطوط مستقیم کہینچے گئے ہین یہہ خطوط طاقتونکے سمتونکو تعبیر کرتے ہین ہر ایک طاقت اسخط کی طول اور جسم کے وزن حاصل ضرب کے برابر ہی تو ثابت کرو کہ طاقتونکا حاصل کی سمت اوس خط سے تعبیر ہوگی جو نقطہ مفروضہ سے اجسام کی مرکز ثقل تک کہنچا جاوے اور اوس خط کی طول اور وزنونکے مجموعہ کے حاصلضرب کے برابر ہوگی

اول فرض کرو کہ دو وزندار اجسام صغیر ہین - ا و ب اونکی موقف ہین ط اور ق

اونکی وزن ہین اور ل اونکا مرکز ثقل ہے



فرض کرو کہ و کوئی نقطہ مفروضہ ہے

پس دو طاقتین ہین یعنی ط × و ا و ا کے

سمت ہین اور ق × و ب و ب کے سمت ہین

طاقت ط × و ا دو حصون مین منفصل ہو سکتے

ہین یعنی ط × و ل و ل کے سمت ہین اور ط × ل ا ل ا کے متوازی سمت ہین اور طاقت

ق × و ب جو و ب کے سمت مین عمل کرتی ہے دو حصون مین منفصل ہو سکتی ہے یعنی

ق × و ل و ل کے سمت مین اور ق × ل ب ل ب کے متوازی سمت مین

اب دو طاقتین ط × ل ا اور ق × ل ب مساوی اور مخالف ہین اسواسطے وہ ساکن

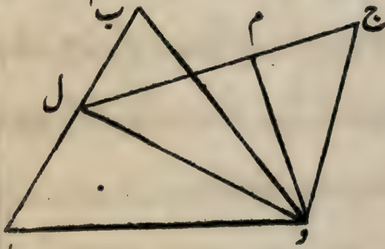
رہینگی پس حاصل (ط + ق) و ل و ل کی سمت مین ہے پھر فرض کرو کہ تین وزندار

اجسام صغیر ہین

فرض کرو کہ ط ق ح اونکے وزن ہین

ا ب ج جداگانہ اونکی موقف ہین ل ط اور ق کا مرکز ثقل ہے اور م ط ق اور

ح کا مرکز ثقل ہے



و نقطہ مفروضہ ہے اور تین طاقتین

ط × و ا و ا کی سمت مین اور ق × و ب

و ب کی سمت مین اور ح × و ج و ج کے

سمت مین عمل کرتی ہے - پہلی صورت کی ثبوت سے یہہ طاقتین برابر ہین (ط + ق)

+ح) وم کے سمت مین اگر ۴ اجسام صغیر ہین اور چوتھی کا وزن س ہو اور د
اوسکا موقف ہو تو وہ برابر ہونگے (ط + ق + ح) دم کے وم کے سمت مین اور
س × و د کے م د کے سمت مین اور یہہ طاقتین پہر برابر ہونگے (ط + ق + ح + س) ×
د ن. دن کے سمت مین جہانکہ ن ۴. اجسام صغیر کا مرکز ثقل ہے
اسطرحسے اگر اجسام صغیر کے تعداد زیادہ ہو تو بہی ہم اس شکل کو قایم کرسکتے ہین
اگر وہ نقطہ جسپر کہ طاقتونکے سمتین ملتی ہین اجسام صغیر کے مرکز ثقل سے منطبق ہو تو حاصل
صفر ہوگا یعنی طاقتین ساکن ہونگے

(۱۵۵) کسی نقطہ سے کئی ایک خطوط کہینچے گئے ہین اور مقدار اور سمت مین طاقتونکو
تعبیر کرتی ہین تو ثابت کرو کہ حاصل اوسخط مستقیم سے تعبیر ہوگا جو نقطہ مفروضہ سے
اون ہم وزن صغیر اجسام کے مرکز ثقل تک کہینچا جاوے جو خطوط مذکورہ کے دوسری
انجامون پر رکہے ہوئے فرض کیجاوین اور مساوی ہوگا حاصل ضرب اس خط کے
تعداد اوزان مین

یہہ حد بالا کے ایک خاص صورت ہے یعنی جب سب اجسام کو ہموزن فرض کیا جاوے
اگر وہ نقطہ جہانکہ طاقتونکے سمتین آکر ملتے ہین ہموزن اجسام کے مرکز ثقل کے ساتہہ منطبق
ہو تو حاصل صفر ہوگا یعنے طاقتین ساکن ہونگے

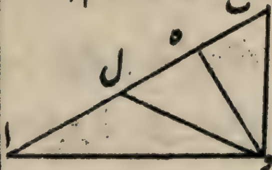
(۱۵۶) اگر کسی نقطہ سے کسیقدر وزندار اجسام صغیر تک خطوط کہینچے جاوین اور ہر ایک
جسم کا وزن جداگانہ نقطہ مفروضہ سے اوسکے فاصلہ کے مربع سے اور نیز مرکز ثقل
سے اوسکے فاصلہ کے مربع مین ضرب دیا جائے تو پہلی حاصل ضرب کا مجموعہ پچھلی
حاصل ضرب کی مجموعہ سے بڑا ہوگا بقدر کل وزنونکے مجموعہ اور نقطہ مفروضہ اور

مرکز ثقل کے درمیانی فاصلہ کے مربع کے حاصل ضرب رکے

اول فرض کرو کہ دو اجسام صغیر ہین ط اور ق اونکے وزن ہین ا اور ب اونکے موقف ہین ل اونکا مرکز ثقل

فرض کرو کہ و نقطہ مفروضہ ہے تو ط × (و ا)۲ + ق × (و ب)۲ = ط × (ا ل)۲ + ق × (ب ل)۲ + (ط + ق) × (و ل)۲

فرض کرو کہ و ہ نقطہ و سے اب پر عمود ہے - بموجب اشکال ۱۲ و ۱۳ م ۲



(و ا)۲ = (ا ل)۲ + (و ل)۲ + ۲ (ا ل × ل ہ)

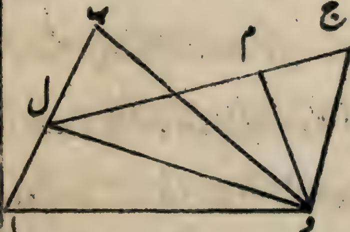
(و ب)۲ = (ب ل)۲ + (و ل)۲ - ۲ ب ل × ل ہ

پس ط × (و ا)۲ + ق (و ب)۲ = ط × (ا ل)۲ + ق × (ب ل)۲ + (ط + ق) × (و ل)۲

کیونکہ ط × ا ل = ق × ب ل بموجب اصول مرکز ثقل کے

اس شکل مین نقطہ ہ ل اور ب کے درمیان واقع ہوتا ہے مگر اس شکل کے ہر حالت مین بہی ثبوت کافی ہوگا

پھر فرض کرو کہ تین اجسام صغیر ہین - ط ق ح اونکی وزن ہین اب ج اونکی موقف ہین ل ط و ق کا مرکز ثقل ہے اور م ط و ق و ح کا مرکز ثقل ہے پس نتیجہ مذکورہ کے تین دفعہ عمل کرنے سے یہہ حاصل ہوتا ہے



کہ ط × (و ا)۲ + ق × (و ب)۲ + ح × (و ج)۲ =

+ (ط + ق) × (و ل)۲ + ح × (و ج)۲ =

ط × (ل ا)۲ + ق × (ل ب)۲ + (ط + ق) × (م ل)۲ + ح × (م ج)۲ + (ط + ق + ح) × (و م)۲

= ط × (م ا)۲ + ق × (م ب)۲ + (ق + ح) × (و م)۲ اسیطرح ان نتیجوں کو تین دفعہ استعمال

م ط × (ل ا)۲ + ق (ل ب)۲

کرنے مین ہم اس شکل کو ثابت کرسکتے ہین جبکہ اجسام صغیرہ کی تعداد چار ہو اور قس علیہذا

(١٥٧) اگر کسی نقطہ سے کسیقدر اجسام صغیرہ تک خطوط کہینچے جاوین اور پہر ایک جسم کا وزن جدا گانہ نقطہ مفروضہ سے اوس فاصلہ کی مربعہ مین ضرب دیا جاوے تو حاصل ضرب کا مجموعہ اوسی الہین بہت ہی کم ہوگا جبکہ نقطہ مفروضہ اجسام کے مجموعہ کا مرکز ثقل ہے

یہہ بات پہلی حد کی شکل سے ثابت ہے

(١٥٨) مرکز ثقل کے بابت ایسی امثلہ دیجا سکتے ہین جسمین کوئی نیا اصول جر ثقیل ہنین پایا جاتا بلکہ صرف علم ہندسہ کے نتایج ہین

مثلاً کسی مثلث کے مرکز ثقل کا فاصلہ اوسکے تینون زاویون سے مثلث کے اضلاع کی حدونمین معلوم کرنا ہے

فرض کرو کہ اب ج ایک مثلث ہے اور د ب ج کا نقطہ تنصیف ہے اور گ اوسکا مرکز ثقل ہے تو نقطہ گ خط ا د مین ہے اور گ ا = ٢/٣ ا د کی

اب بموجب حد (١) ضمیمہ اقلیدس

(اب)٢ + (اج)٢ = ٢(اد٢ + ب د٢)

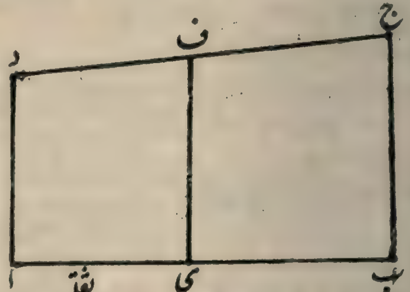
∴ (اد)٢ = ١/٢ {(اب)٢ + (اج)٢} − ١/٢ (ب ج)٢ اور (اگ)٢ = ٤/٩ (اد)٢

پس (اگ)٢ = ٢/٩ {(اب)٢ + (اج)٢ ١/٢ (بج)٢} اسیطرح سے (ب گ)٢ اور (ج گ)٢ کیواسطے بہی قیمتین دریافت ہو سکتے ہین

(١٥٩) مرکز ثقل کے ضمن مین ہمین ہندسہ کے کئی شکلونکے ثبوت مل سکتے ہین

اسکی ہم مثال دیتے ہین

فرض کرو کہ ا ب ج د چار نقاط ہین اور یہہ ضروری نہین کہ سب ایک ہی سطح مین ہون فرض کرو کہ مساوی وزندار اجسام صغیر ان نقطون پر رکھی ہوئی ہین توی ان اجسام



کا مرکز ثقل ہے جو ا اور ب پر ہین اور ف اون اجسام کا مرکز ثقل ہے جو ج د پر ہین پیر کل اجسام کا مرکز ثقل ی ف کا نقطہ درمیانی ہے اسطرحسے کل اجسام کا مرکز ثقل اوس خط کی نقطہ درمیانی پر ہوگا جو ا د ج د کی نقاط تنصیف کو وصل کرتا ہے مگر کل اوزان کا مرکز ثقل ایک ہی ہوگا پس ہمین نتیجہ مفصلہ ذیل حاصل ہوتا ہے کہ اگر کسی شکل ذوا ربعۃ الاضلاع کی مقابل کے اضلاع کے نقاط درمیانی مین خطوط کہینچے جاوین تو وہ ایک دوسرے کی تنصیف کرینگے

اسطرحسے مثلث کی مرکز ثقل دریافت کرنے کے طریقہ سے ہم یہہ نتیجہ نکال سکتے ہین کہ اگر مثلث کی زاویون سے اونکی مقابل کے اضلاع کے نقاط تنصیف تک خطوط کہینچے جاوین تو وہ ایک نقطہ پر ملین گے

سوالات باب دہم ۱۰

(۱) ایک مربع ایک سطح افقی پر قایم ہے اوسکی دو مقابل کے کونے سے دو مساوی ٹکڑے بذریعہ وتر کے متوازی خطوط کے کاٹ لئے گئی ہین تو معلوم کرو کہ کم سے کم

کتنا حصہ مربع کا باقی رہنا چاہیے تاکہ گر پڑے

(۲) اگر ایک ہی قاعدہ پر اور ایک ہی متوازی خطوط کے درمیان کئی مثلث واقع ہون تو اونکی مرکز ثقل کا خط متواصل معلوم کرو

(۳) کسی وزندار جسم کے سطح کا کچھہ حصہ کرہ نما ہے اور جب اوس حصہ کا کوی نقطہ ایک سطح افقی سے مس کرے تو جسم ساکن ہوتا ہے جسم کا مرکز ثقل دریافت کرو

(۴) کسی مثلث کا قاعدہ اور ارتفاع معلوم ہے تو مثلث کو ایسا بناؤ تاکہ جب اوسکا قاعدہ سطح افقی پر ہو تو مثلث ساکن رہے

(۵) کوی ذوار بعہ الاضلاع شکل جسکی سب اضلاع برابر ہون ساکن رہ سکیگی بشرطیکہ اوسکی سطح راسی ہو اور اوسکا کوئی ایک ضلع کسی سطح افقی پر قایم ہو

(۶) دو وزن و و ۲ و بذریعہ ایک سلاخ بی وزن کے ملے ہوئی ہین اور نیز بذریعہ ایک ڈوری کی جو ایک کیل پر سے گذرتی ہے ملی ہوئی ہین تو کیل کی دونو طرف ڈوری کے طولون کے نسبت دریافت کرو تاکہ وزن ساکن رہین

(۷) اگر ایک ہی وتر پر کئی ایک قایمۃ الزاویہ مثلث بنای جاوین تو اونکی مراکیز ثقل ایک دایرہ مین واقع ہونگے

(۸) اگر کسی مثلث کی اضلاع کے تنصیف کیجاوے اور نقاط تنصیف کی وصل کرنے سے جو مثلث بنی کاٹ لیا جاوے تو ثابت کرو کہ باقی حصہ کا مرکز ثقل کل مثلث کے مرکز ثقل کے ساتھہ منطبق ہوگا

(۹) ایک گول میز تین پایون پر جو محیط کے برابر فاصلون پر واقع ہین قایم ہے تو ثابت کرو کہ اگر میز کے کسی نقطہ پر ایک ایسا جسم رکھا جاوے جسکا وزن میز کی وزن

سے زیادہ ہنو تو میز گر نہین پڑیگے

(۱۰) اب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے جبکا زاویہ اب ج = ۶۰°
اور قاعدہ ب ج طول مین ۶ انچ ہے تو ضلع اب کا بڑے سے بڑا طول کیا ہوگا
بشرطیکہ شکل مذکور ب ج پر قایم رہ سکے

(۱۱) ایک مثلث وزندار کو بذریعہ ایک ڈوری کے جو اوسکے ایک ضلع کی کسی نقطہ
سے گذرتی ہے لٹکاتا ہے تو اوس نقطہ کا مقام دریافت کرو تاکہ مثلث اسطرح ساکن
رہے کہ اوسکا ایک ضلع سمت راس مین ہو

(۱۲) ایک مثلث جبکا زاویہ ب منفرجہ ہے اسطرح سے ٹہرا ہوا ہے کہ اوسکا ضلع ج ب
ایک سطح افقی پر رکہا ہوا ہے زاویہ ا سے ایک خط راس سطح مذکورہ بالا کو نقطہ
د پر قطع کرتا ہے تو ثابت کرو کہ اگر ب د ب ج سے کم ہے تو مثلث کہڑا رہیگا اور
اگر ب د ب ج سے بڑا ہے تو گر جائیگا

(۱۳) ایک مثلث وزندار کے اضلاع ۳ و ۴ و ۵ جداگانہ ہین اگر مثلث اوسکی اندر
کے دایرہ کے مرکز سے لٹکایا جاوے تو ثابت کرو کہ مثلث ساکن اوسوقت رہیگا
جبکہ اوسکا سب سے چہوٹا ضلع سمت افقی مین ہو

(۱۴) ایک قایمۃ الزاویہ مخروط کا ارتفاع ع ہے اور قاعدہ کا قطر ب ہے
نقطہ راس اور مدور قاعدہ کی محیط کسی نقطہ کے درمیان ایک ڈوری باندہی گئی ہے
اور پہر ایک کیل پر ڈالی گئی ہے تو ثابت کرو اگر مخروط اسطرح ساکن ہے کہ
اوسکا محور سمت افقی مین ہو تو ڈوری کا طول $\sqrt{ع^2 + ب^2}$ ہونا چاہیے

گیارہوان باب

مجرار کے بیان مین

(۱۶۰) کلین اجسام مین حرکت پیدا کرنے یا اونکی حرکت بدلنے یا اونکی حرکت روکنی کی آلے یا اوزار ہوتے ہین

سادہ کلونکو قوای جرّی کہتے ہین اور ان کلونکے ملانے سے تمام کلین خواہ کیسی ہی پیچیدہ ہون بنتی ہین یہہ سادہ کلین یا قوای جرّی تعداد مین سات ہین ۔۔ مجرار چرخ اور محور دندانہ دار چرخ گھرنی سطح مائل فانہ پیچ

ہم آلات مذکورہ بالا کے سکون کے شرایط دریافت کرینگے یعنی ہم فرض کرینگے کہ یہہ کلین حرکت کی روکنے کے واسطے کام مین آتے ہین تو ہر ایک صورت مین دو طاقتین ہونگے جو کل کے ذریعہ سے ایک دوسریکا اثر زایل کرینگے ایک طاقت کو اعتباراً طاقت کہینگے اور دوسری کو وزن ہم بیان کرینگے کہ ہر ایک صورت مین سکون کیواسطے طاقت اور وزن مین ایک خاص نسبت ہونی چاہیئے اور یہہ نسبت کل کے ساخت پر منحصر ہے

کو تم ہم صاف اور ہلا وزن تصور کرینگے جب تک کہ اوسکے خلاف نہ لکھین اسباب
مین مجرار کا بیان ہوگا

(۱۶۱) مجرار ایک سخت سلاخ ہوتی ہے اور ایک سطح مین ایک نقطہ کی گرد گھوم سکتی ہے جسکو حامل یا فلکرم کہتے ہین حامل مجرار کو جن حصو نمین تقسیم کرتا ہے اونکو مجرار کے بازو کہتے ہین جبکہ بازو ایک ہی خط مستقیم مین ہون تو اوس مجرار کو راست کہتے ہین اور جب ایک خط مستقیم مین نہون تو اوسی مجرار خمدار کہتے ہین جس سطح مین مجرار گھوم سکتا ہے اوسکو سطح مجراری کہتے ہین جو قوی مجرار پر عمل کرتے ہین اونکا عمل مجرار کی سطح مین فرض کرتے ہین

(۱۶۲) اگر حامل کی لحاظ سے طاقت اور وزنکے نقاط انفعال کا خیال کرین تو مجرار تین قسم مین منقسم ہوتی ہین

اول قسم مین طاقت اور وزن حامل کے مخالف اطراف مین عمل کرتی ہین

دوسری جبکہ طاقت اور وزن حامل کے ایک ہی طرف ہون مگر وزن حامل سے زیادہ قریب ہو

تیسرا طاقت اور وزن حامل کے ایک ہی طرف عمل کرتے ہون مگر طاقت حامل سکے زیادہ قریب ہو

پس ہم اختصارا یہہ کہہ سکتے ہین کہ مجرار کے تین قسمون مین جداگانہ حامل وزن اور طاقت بیچ مین ہوتے ہین

(۱۶۳) مجرار قسم اول کی مثال یہہ ہے ایک سلاخ جس سے ایک بھاری وزن کو اوٹھاتی ہین ۔ انگیٹھی سے کوئلو نکو حرکت دینیکا آلہ ۔ مقراض وغیرہ قسم اول کی دوہری

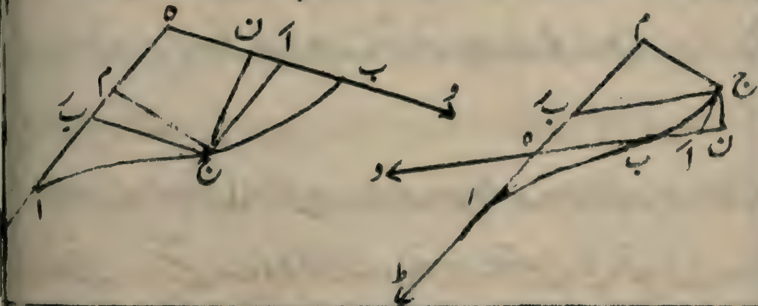
مجراروںکے مثالین ہین

کشتی کا چپہ دوسری قسم کی مجرار کے مثال ہے - حامل چپہ کی اوس سری پر ہوتا ہے
جو پانی مین ہوتا ہے طاقت ہاتھہ پر عمل کرتی ہے اور وزن چپہ کے رسی پر ہوتا ہے سپاری
وغیرہ کی کاٹنے کا آلہ دوسری قسم کی دوہرے مجرار کے مثال ہے

دست پناہ تیسری قسم کے دوہرے مجرار کے مثال ہے حامل اوس مقام پر ہوتا ہے
جسپر آلہ کے دونون حصے گہوم سکتے ہین طاقت ہاتھہ کے دباو سے پیدا ہوتی ہے وزن دونون سرون
پر کوئے لی سقامت ہوتا ہے انسان کے طاقت بہی تیسری قسم کی مجرار کے مثال ہے حامل کہنی کو
ہوتا ہے طاقت ایک جوڑ سے جو بازو کے اوپر لی حصہ سے آتا ہے پیدا ہوتی ہے اور
وزن وہ شے ہوتی ہے جسکو ہاتھہ سے اوٹھایا جاوے

(۱۶۴) مجرار پر عمل کرنیوالے طاقتوںکے معدلت کیواسطے یہہ ضرور ہے اور کافی
ہوگی کہ اونکے مقیاس القوۃ حاصل کے گرد مقدار مین برابر اور سمت مین مخالف ہون
اسکا ثبوت ہم پہلے دیچکے ہین دیکھو حد (۱۰۲) مگر مجرار کے اصول کے تشریح کے لئے
ہم علیحدہ ثبوت دیتے ہین

(۱۶۵) جبکہ مجرار حالت معادلت مین ہوتا ہے تو طاقت اور وزن مین وہ نسبت
ہوتی ہے جو نسبت کہ اوس عمود کو جو وزنکے خط پر حامل سے گرایا جاوے



فرض کرو کہ اج ب مجرار ہے اور ر ج اوسکا حامل ہے -

فرض کرو کہ ط اور و علیحدہ علیحدہ ا اور ب پر عمل کرتے ہین اور مجرار کو حالت معادلت مین رکہتے ہین

فرض کرو کہ طاقت اور وزن کے خطوط بڑہانے سے نقطہ (و) پر ملتے ہین تب حاصل ط اور و کا ایک ایسی طاقت ہوگے جو کہ و پر عمل کریگے تو یہہ حاصل نقطہ ج سے گذرنا چاہیے کیونکہ مجرار حالت معادلت مین ہے اسلئے ط اور و کا حاصل و ج کی سمت مین ہوگا

ج امتوازی د ا کی اور ج ب و ب کی کہینچو تا کہ جداگانہ و ب اور و ا سے جا کر ملین اور ج م اور ج ن عموداً و ا اور و ب پر ڈالو

تب بحکم طاقتون کے متوازی الاضلاع کے $\frac{ط}{و} = \frac{ج ا}{ج ب}$

و بحکم تشابہ مثلث ج ن ا اور ج م ب کے $\frac{ج ا}{ج ب} = \frac{ج ن}{ج م}$ ∴ $\frac{ط}{و} = \frac{ج ن}{ج م}$

و بر عکس اسکے اگر $\frac{ط}{و} = \frac{ج ن}{ج م}$ کے اور وزن ط اور و مجرار کو مخالف سمتون مین گہمانیکے قابلیت رکہتے ہون تو وہی مجرار کو حالت معادلت مین رکہینگے

کیونکہ اوسی شکل سے $\frac{ط}{و} = \frac{ج ن}{ج م} = \frac{ج ا}{ج ب}$ اور اسلئے و ج ط اور و کے حاصل کی سمت ہے اور چونکہ حاصل ج سے گذرتا ہے اسلئے مجرار حالت معادلت مین ہوگا

(۱۶۶) قیاساً دویم اور سیوم قسم کی مجرار مین چندان فرق نہین ہے لیکن کاراً مدن بڑا فرق ہے کیونکہ شرط معادلت سے یہہ ظاہر ہے کہ دویم قسم کے مجرار مین طاقت بنسبت وزن کے کم ہوگے سویم قسم کے مجرار مین طاقت وزن سے زیادہ ہوگے

جب حالت معادلت ہو تو وزن اور طاقت کے نسبت کو فایدہ کل کہتے ہین

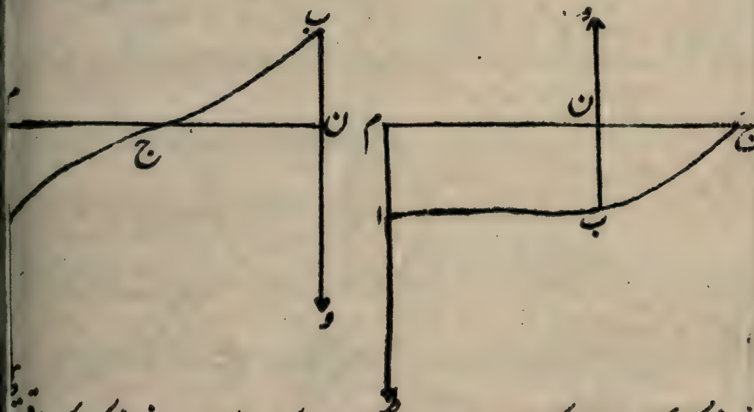
یہہ فایدہ دوسری قسم کے مجرار مین حاصل ہوتا ہے اور تیسری قسم کی مجرار مین کھویا جاتا ہے

(۱۶۷) (۱۶۵) حد کی تحقیق مین فرض گیا ہے کہ اگر سمت طاقت اور وزن کے بڑہائے

جاوے تو وے ملجاوینگے مگر نقطہ تقاطع حامل سے کسی فاصلہ پر واقع ہوسکتا ہے

پس اگر سمت طاقت اور وزن کے متوازی ہون تو بہی (۱۶۵) حد کا نتیجہ درست

ہوگا۔ مگر ہم اسصورت کا ایک علیحدہ ثبوت کرینگے



فرض کرو کہ اج ب ایک مجرار ہے اور ج اوسکا حامل ہے فرض کرو کہ طاقتین

ط اور و ا اور ب پر علیحدہ جداگانہ عمل کرتے ہین اور اوسکو حالت معادلت مین رکہتے

ہین ج مین سے ایک خط کہینچو ج و اور ط کے سمتون پر عمود ہو اور اونہین م

اور ن پر جبہ اگانہ قطع کرے

اب بحکم حد (۱۶۰) اور (۶۱) کے ط اور و کا حاصل ایک طاقت اونکی متوازی

ہے جو اونسے اسسے فاصلون پر ہے جنکو طاقتون سے عکس نسبت ہے لیکن چونکہ

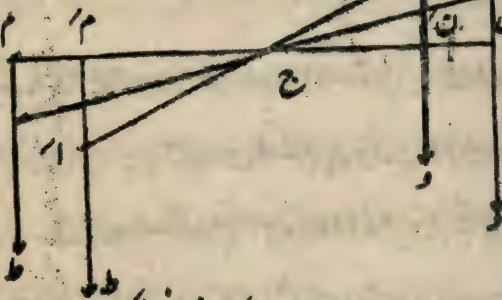
مجرار حالت معادلت مین ہے اسلیے حاصل نقطہ ج مین سے گذرنا چاہیے۔

$\frac{ط}{و} = \frac{ج ن}{ج م}$ اور برعکس اسکی اگر $\frac{ط}{و} = \frac{ج ن}{ج م}$ اور وزن اور طاقت مجرار کو مخالف سمتون مین گہمانے کے قابلیت رکہتے ہین تو مجرار کو حالت معادلت مین رکہینگے کیونکہ جب $\frac{ط}{و} = \frac{ج ن}{ج م}$ تو حاصل ط اور و کا ج سے گذرنا چاہیئے پس مجرار حالت معادلت مین ہوگا

(۱۶۸) حدود مذکورہ بالاسے یہہ ظاہر ہے کہ حالت معادلت مجرار پر بعد وحامل کے پیدا ہوتا ہے جو طاقت اور وزن کے حاصل کے برابر اور مخالف طاقت پیدا کرتا ہے پس ہمین معلوم ہوا کہ حامل پر ط اور و کے حاصل کے برابر دباو ہوگا اگر ط اور و متوازنے ہون تو یہہ حاصل ط اور و کے جبریہ مجموعہ کے برابر ہوگا اور حالتون مین بذریعہ متوازی الاضلاع طاقتونکے دریافت ہوسکتا ہے

(۱۶۹) اگر دو وزن مجرار راست کو کسی حالت مین جو کہ سمت راس سے مایل ہو ساکن رکہین تو وہ اوس مجرار کو کسی اور حالت مین بہی حالت معادلت مین رکہینگے

فرض کرو کہ اب مجرار کے حالت ہے جب و اور ط اوسپر عمل کرکے حالت سکون پیدا کرتے ہین اور ج حامل ہے



فرض کرو کہ اب مجرار کے ایک اور حالت ہے ج مین سے ایک خط افقی کہنچو جو کہ ط اور و کی تعبیر کنندہ راسے خطون کو م اور ن اور م′ اور ن′ پر ملے

چونکہ ط اور و مجرار کے حالت اب مین ساکن رہتے ہین $\therefore \frac{ط}{و} = \frac{ج ن}{ج م}$ اور مشابہ مثلثونکے $\frac{ج ن}{ج م} = \frac{ج ب}{ج ا} = \frac{ج ب′}{ج ا′} = \frac{ج ن′}{ج م′} \therefore \frac{ط}{و} = \frac{ج ن′}{ج م′}$

∴ طاقت اور وزن مجرار کی ا ب کی حالت مین ساکن رہنگی

سوالات نمبر (۱۱)

(۱) ایک وزن ۵ پونڈ کا مجرار راست کی ایک سری سے لٹکتا ہے اور دوسرا وزن ۱۵ پونڈ کا دوسری سے لٹکتا ہے اور مجرار حالت معادلت مین ہی تو بازونکی نسبت دریافت کرو

(۲) دو وزن $2\frac{1}{2}$ پونڈ کی ایک راست مجرار ۹۲ انچ طول والے کی سرون سے لٹکای گئے ہین تو بتاؤ کہ حالت معادلت کے واسطے حامل کس جگہہ ہو گا

(۳) دو وزن جنکے حاصل جمع $6\frac{1}{2}$ پونڈ ہے ایک راست مجرار کے سرون سے لٹک کر اوسکو حالت معادلت مین رکھتے ہین اور اگر حامل ایک وزن سے دوسرے وزن تک نسبت ۴ گنا فاصلہ پر واقع ہو تو ہر ایک وزن کا مقدار بتاؤ

(۴) ایک مجرار سات فٹ لنبا دو ستونون سے جو اوسکی سرونپر رکھی ہوئے ہین سہارا ہوا ہے اور حالت افقی مین تو ایک وزن ۲۸ پونڈ کا کس جگہہ رکھا جاوے کہ ایک ستون پر ۸ پونڈ کا دباؤ یعنے بوجہ ہو۔

(۵) دو وزن ۱۲ اور ۸ پونڈ کی علیحدہ علیحدہ ایک ۱۰ فٹ افقی مجرار پر کے سرون سے لٹکتی ہین اور اوسی حالت معادلت مین رہتے ہین تو بتاؤ کہ اگر دو پونڈ کا وزن ہر ایک مین زیادہ کیا جاوے تو حالت معادلت کیواسطے حامل کتنی دور سرکانا چاہیے

(۶) اگر بوجہ حامل پر ۱۵ پونڈ کی برابر ہو اور فرق دونون طاقتون مین تین پونڈ ہو تو دونون وزن اور نسبت بازؤنکی جن پر وہ عمل کرتے ہین دریافت کرو۔

(۷) ایک مجرار جب اوس پر دو طاقتین ط اور ق عمل کرتے ہین حالت معادلت مین رہتا ہے لیکن اگر ط کو ۳ گنا کیا جاوے اور ق مین ۶ پونڈ زیادہ کیجاوین تو پہر بہی مجرار حالت معادلت مین رہتا ہے تو مقدار ق کی بتاؤ۔

(۸) حامل پر ۱۲ پونڈ دباؤ ہے اور حامل کا فاصلہ مجرار کے نقطہ تنصیف سے مجرار کی کل طول کا $\frac{1}{12}$ حصہ ہے تو ایسے طاقتین دریافت کرو کہ جو حامل کے مخالف سمتون مین عمل کرکے مجرار کو حالت معادلت مین رکہین

(۹) ایک طاقت دوسرے طاقت سے ۴ گنی ہے اور طاقتین حامل کے ایک ایک ہی سمت مین عمل کرتے ہین اور حامل پر بوجہ ۹ پونڈ کا ہے تو طاقتونکی جائی عمل اور مقدار دریافت کرو

(۱۰) اب ج ایک راست بی وزن سلاخ ۹ انچ طول کی ہے درمیان دو کیلون ا اور ب کے جن کی درمیان ۴ انچ کا فاصلہ ہی رکہے ہوئی ہے اسطور پر کہ وہ بذریعہ ایک ۱۰ پونڈ کے وزن کے جوج سے لٹکتا ہے اور دونون کیلون کی حالت افقی مین ساکن ہے تو دونون کیلو نپر دباؤ معلوم کرو۔

(۱۱) ایک مجرار حمدار ہے جبکا زاویہ خم قائمہ ہے اور نقطہ خم حامل ہے ایک بازو کا طول دوسری سے دوچندی مجرار کے سرونسے دو وزن لٹکتی ہین اگر بحالت سکون دونون بازؤنکا میلان سطح افقی سے یکسان ہو تو اونکی نسبت ایک دوسرے سے معلوم کرو۔

(۱۲) حامل پر دباو ۳ پونڈ ہے اور دونون طاقتونکی حاصل جمع ۱۰ پونڈ ہے اور اونکا فاصلہ ایک دوسرے سے ۲ فٹ ہے تو اونمین سے ہر ایک کا فاصلہ حامل سے معلوم کرو۔

(۱۳) حامل پر دباو ۵ پونڈ ہے اور ایک وزن حامل سے بفاصلہ $\frac{1}{4}$ کل طول مجراہ کے واقع ہے تو اوزانکے قیمت دریافت کرو فرض کیا کہ وے حامل کی مخالف سمتون مین عمل کرتے ہین ۔

(۱۴) ایک کاک لگانے کی آلہ کا بازو ۱۸ انچ ہے اور ایک کاک حامل سے بفاصلہ ڈیڑہ انچ کی رکہا گیا ہے تو اگر دستہ سے اسٹول کا وزن لٹکایا جاوے تو کل دباو کتنا ہوگا

(۱۵) اگر حامل دونون طاقتونکی درمیان ہو اور اوسکا فاصلہ ایک سے مجراہ کے طول کی ایک تہائی کے برابر ہو ثابت کرو کہ جب کسی ایک طاقت کی سمت عکس کیجاوے تو حامل کو اوس طاقت سے اونکی پہلی فاصلہ کی سہ چند فاصلہ پر چاہیے

(۱۶) دو طاقتین دو پونڈ اور چار پونڈ کے ایک مجراہ مستقیم کے ایک ہی نقطہ پر مجراہ کے مخالف سمتون مین عمل کرتے ہین تو بڑے طاقت کے سمت اور حامل پر دباؤ دریافت کرو ۔

(۱۷) ایک ۲ فٹ طول کی مجراہ کے ایک سرے سے ایک وزن ط پونڈ کا لٹکتا ہے حامل مجراہ کا دوسرا سرا ہی اور مجراہ ایک ایسی طاقت ق سے ساکن ہے کہ حامل پر دباؤ $\frac{1}{2}$ پونڈ ہے تو ق کے مقدار پر مقام عمل دریافت کرو

(۱۸) ایک مجرار مستقیم کی نقاط ا و ب و ج پر اوزان ط و ق و س لٹکتے ہین اور مجرار ایک نقطہ د پر جو اوسکا حامل ہے تو ثابت کرو کہ ق × اب + س × اج = (ط + ق + س) × اد

(۱۹) ا ب ج ایک مجرار مستقیم ہے اب کا طول ۷ انچ ہے ب ج کا تین انچ اور ب پر ۱۶ اور ۱۰ پونڈ کی وزن لٹکتے ہین اور ج پر اوپر کیطرف ۶ پونڈ کا دباو ہے تو حامل کا مقام دریافت کرو جبکہ مجرار اس صورت مین ساکن رہے اور حامل پر دباو کیا ہوگا

(۲۰) ایک مجرار کی حامل کے ایک ہی طرف اوزان ۶ اور ۴ پونڈ کے بفاصلہ ۲ و ۶ انچ کے جداگانہ لٹکتے ہین تو معلوم کرو کہ ایک ہی طرف اوزان ۱۶ اور ۴ پونڈ کے طاقت سکون کے لئے کسمقام پر لگانے چاہیے تاکہ حامل پر حتی الامکان کم دباو رہے

(۲۱) حد ۱۶۹ کا دعوی اوسحالت کے لئے ثابت کرو جبکہ اوزان دو سے زیادہ ہون اور نقطہ ج مین سے گذرتے ہوئی ایک خط کی نقاط پر عمل کرین۔

(۲۲) اج ب ایک خمدار مجرار ہے ج ا و ج ب اوسکے بازو مستقیم اور طول مین مساوی ہین اور ایکدوسرے سے ۱۳۵ درجہ کا زاویہ بناتی ہین جب ج ا افقی ہو تو ا پر ایک وزن ط ب پر ایک وزن ق سے ساکن رہتا ہے[1] تو ط اور ق کے نسبت دریافت کرو۔

(۲۳) ایک مجرار اج ب نقطہ ج پر جو اوسکا حامل ہے خمدار ہے پ پر ایک وزن ق لٹکتا ہے اگر ا پر وزن ط لٹکا یا جاوے تو اج افقی ہو جاتا ہے اور مجرار

[1] ط اور جب ج ب افقی ہو تو وزن ط کے لئے ۱۶ پونڈ کی ضرورت [illegible]

ساکن رہتا ہے مگر جب اوس وزن س لٹکایا جاوے تو ج ب افقی بنجاتا ہی
تو ثابت کرو کہ ج ا : ج ب : : ق : ط + س
(۲۴) ایک مجرار کا طول ۵ فٹ ہے اور اوسکی سروں سے بذریعۂ دو رسیوں کے جنکی
طول جدا گانہ ۳ فٹ و ۴ فٹ ہین ایک وزن لٹکایا گیا ہے تو ثابت کرو کہ
اگر مجرار کے حالت افقی مین سکون ہو تو حامل مجرار کو ایسے دو حصون مین تقسیم کریگا
جنکی نسبت ایک دوسرے سے ۹ : ۱۶ کے ہوگے

بارہوان باب

درباب ترازو

(١٧٠) مجرار کو واسطے دریافت کرنی وزن اشیاء کے استعمال کیا جاتا ہے
ور اسصورت مین اسی ترازو کہتے ہین اب ہم چند مختلف قسمین ترازو کے بیان کرینگے
پہلی باب مین ہمنے مجرار کو ایک سلاخ بے وزن تصور کیا ہے لیکن استعمال مین
ہمیشہ اوسکا وزن ہوا کرتا ہے۔ چنانچہ ہم اسبات کا آیندہ لحاظ رکھینگے
اب ہم مروج ترازو کا بیان کرتے ہین

(١٧١) مروج ترازو کا بیان مروج ترازو مشتمل ہوتا ہے ایک ڈنڈی اور دو
پلڑون سے جو اوسکے دونون سرون سے لٹکتے ہین ڈنڈے حامل کے گرد پہر سکتی ہے
جو ڈنڈے کے مرکز ثقل کے اوپر ہوتا ہے اور اسلئے اوس نظام کے مرکز ثقل
کے اوپر ہوتا ہے جو بنتا ہے۔ ڈنڈی پلڑون اور اون اشیاؤن سے جو پلڑون مین ڈالے
جائین ڈنڈے کے بازو طول مین برابر ہونے چاہئین اور جب پلے خالی ہون تو ڈنڈے کو
حالت معادلت کیواسطے حالت افقی مین ہونا چاہیئے اگر یہہ سب شرایط پورے
ہون تو اوس ترازو کو درست ترازو کہتے ہین ورنہ اوسے غلط ترازو کہتے ہین
جس چیز کا وزن کرنا ہو اوسے ایک پلے مین ڈالتے ہین اور وزنونکو دوسرے مین

جب تک کہ ڈنڈے حالت معادلت مین حالت افقی مین نہو اسحالت مین اگر ترازو درست ہو وزن چیز کا اون وزنو نسے جو اوس چیز کو ساکن رکہتے مین ظاہر ہوتا ہے ہم ترازو کا امتحان اسطور پر کرسکتے ہین جبکہ وزن اور شے ایک پلے سے دوسرے پلے مین بدلی جاوین تو دیکہنا چاہیئے کہ آیا ترازو حالت معادلت کیواسطے حالت افقی مین رہتا ہے یا نہین

اگر ترازو درست ہو اور چیزین پلون مین برابر وزنو نکے ہون

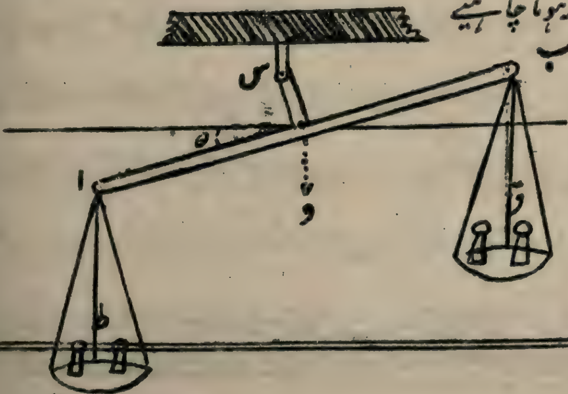
تو ڈنڈے حالت افقی مین نہ رہینگے بلکہ کچہہ وقت تک جنبش کرنیکی بعد آخر کار کسی صورت مین جو افق سے مایل ہوگا ٹہر جاینگے

(۱۷۳) بناوٹ ترازؤن مین مندرجہ ذیل ضروریات پورے ہونے چاہیئے

اول جب پلون مین برابر وزن ہون تو ڈنڈیکو ٹہیک حالت افقی مین ہونا چاہیئے یعنی ترازو کو درست ہونا چاہیے

دوم جب وزن پلون مین ڈالے جاوین اگر اونمین بہت تہوڑا سا فرق ہی ہو تو ترازو اوس فرق کو معلوم کرلے یعنی ترازو محس ہو

سیوم جب ترازو ہلا دیا جاوے تو فوراً اپنے اصل حالت معادلت مین ہو جاوے یعنی ترازو کو استوار ہونا چاہیئے



(۱۷۴) ٹھیک ترازو کی ضروریات پوری کرنیکے باب مین - فرض کرو کہ اب ایک ڈنڈی ہے اور س اوسکا حامل ہے اور فرض کرو اب = ۲ا ہ فاصلہ ہے س کا اب سے ط اور ق وزن اون چیزونکی ہین جو پلّون مین ہین ذ وزن ڈنڈیکا ہے اور ک فاصلہ ہے س سے ڈنڈیکی مرکز ثقل کا یہہ مرکز ثقل اوس عمود مین جو س سے اب پر گرایا گیا ہے فرض کیا گیا ہے ص وزن ہرایک پلہ کا ہے پس ط اور ص سمت الہ آ اس مین اسے عمل کر رہی ہین اور ق اور ص ب سے سمت ر اس مین فرض کرو کہ θ وہ زاویہ ہے جو ڈنڈی حالت معادلت مین افق سے بناتی ہے

تو بموجب حد ۸۶ کی حالت سکون مین وزنونکی مقیاس القوتونکی حاصلجمع س کے گرد صفر ہوگی اب سے ط اور ص کے سمت پر عمود کا طول برابر ہے ا جم θ - ہ جب θ

اور اسطرح طول عمود کا س سے ق و ص کے سمت العمل پر مساوی ہے

ا جم θ + ہ جب θ اور طول عمود کا س سے سمت العمل ذ پر مساوی ہے ک جب θ

∴ (ق + ص) (ا جم θ + ہ جب θ) - (ط + ص) (ا جم θ - ہ جب θ) + ذ ک جب θ

اس سے حالت معادلت کیصورت ہو جاتی ہے (اوّل) جبکہ ط = ق تو س θ = ۔

∴ θ = ۰ پس ترازو درست ہے - پس بازو برابر بنانی سے اور مرکز ثقل ڈنڈیکا اوس عمود پر جو حامل سے ڈنڈی پر گرایا جاوے واقع ہونے سے پہلی ضرورت پوری ہو جاتی ہے

(دویم) واسطے ایک مفروضہ فرق ط اور ق کے جسقدر س بڑا ہو اوسیقدر

طاقت حس زیادہ ہوگی اور واسطے قیمت مفروضہ مس ٥ کے جسقدر ط اور ق مین فرق کم ہو اوسیقدر

پس ہمنے معلوم کرلیا کہ مس ٥ / ط - ق طاقت حس کا پیمانہ ہے ∴

(ط + ق + ۲ ص) ٥/۲ + وک/۱ کو حتی الامکان چھوٹا بنانی

سے دوسری ضرورت پوری ہوجائیگی

(تیسرا) جسقدر اون طاقتونکی مقیاس القوت جو حالت معادلت مین بحال کرتے ہین

زیادہ ہو اوسیقدر ترازو زیادہ استوار ہوگا

اب یہہ مقیاس القوۃ برابر ہے {(ط + ق + ۲ ص) ٥ + دک } جب ٥ -

(ط - ق) ۱ جم ٥

اگر ط اور ق برابر فرض کیا جاوے تو مقیاس برابر ہے {(ط + ق + ۲ ص) ٥

+ وک} جب ٥ تیسری ضرورت کی پوراکرنے کیو اسطے اس مقدمہ کو جسقدر ممکن ہو

بڑا بنانا چاہیئے لیکن یہہ دوسری ضرورت کے برخلاف ہے مگر دونون ضرورتین

(ط + ق + ۲ ص) ٥ + دک کو اور نیز ۱/ک کو بڑا بنانی سے پوری ہوسکتی ہین یعنی حامل کے

ڈنڈی اور ڈنڈیکے مرکز ثقل سے فاصلو کو بڑا بنانے سے اور بازوُ کو بھی بڑھانے

سے پوری ہوسکتے ہین

(۱۷۳) یہہ بات قابل غور ہے کہ ترازو کے طاقت حس عموما اوسکی استواری

سے زیادہ مفید سمجھی جاتی ہے کیونکہ ہم خوب طرح آنکھ سے اسبات کو دیکھہ

سکتے ہین کہ ڈنڈی خط افقی سے ہرایک طرف برابر جھکاو بناتی ہے یعنی آیا حالت

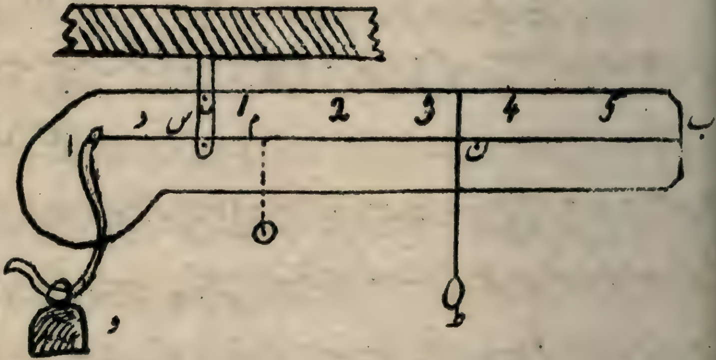
معادلت افقی ہے - اگر یہہ نہو تو وزنونکو بدلتے جانا چاہیئے جب تک کہ جھکاو برابر ہو

پس رواج مین طاقت حس کا زیادہ خیال کیا جاتا ہے اور استواری کا کچھہ لحاظ

ہنین ہوتا - ک فاصلہ چھوٹا بنایا جاتا ہے - اور ہ بہت ہی چھوٹا

(۱۷۵) ایک اور قسم کا ترازو ہوتا ہے جسمین بازو نا برابر ہوتے ہین اور ایک ہی وزن مختلف چیزونکی وزن کرنیکیواسطے استعمال کیا جاتا ہے اسطور پر کہ حامل سے وزنکو ادہر ادہر تبدیل کرتے ہین - مروجی سٹیل یارڈ اس قسم کا ہوتا ہے

(۱۷۶) مروجی سٹیل یارڈ. پر درجہ لگانی کے باب مین



فرض کرو کہ اب سٹیل یارڈ کی ڈنڈی ہے اور س اوسکا حامل ہے اسکا ایک نقطہ مقرری ہے جس سے اشیاء جو وزن کیجاوین لٹکائی جاتے ہین ق وزن ڈنڈیکا معہ پلی کے جو ا سے لٹکتا ہے م انکا مرکز ثقل ہے ط ایک وزن ہے جو حامل سے کسی فاصلہ پر رکھا جاسکتا ہے

فرض کرو کہ جب ط نقطہ ن سے لٹکایا گیا ہے اور ایک و وزن کے چیز اسے تو سٹیل یارڈ حالت معادلت مین ہے اور ڈنڈی حالت افقی مین تو موجب حد (۸۲) کے اگر مقیاس القوۃ سمجھ کے گرولین تو

و × اس ق × س م - ط × س ن = .

اسلئے و = $\frac{\text{س ن} + \frac{\text{ق}}{\text{ط}}\,\text{س م} \times \text{ط}}{\text{اس}}$ س م کے نقطہ خارجہ س پر د

یا نقطہ لو کہ س د = $\frac{\text{ق}}{\text{ط}} \times$ س م تو و = $\frac{\text{س ن} + \text{س د}}{\text{اس}} \times \text{ط} = \frac{\text{د ن}}{\text{اس}} \times \text{ط}$

وغیرہ کے برابر درجے لگاؤ اور اعداد ا و ۲ و ۳ و ۴ وغیرہ درایج پر لکھوان کا

اگر ضرورت ہو پہر بہی تقسیم کر سکتے ہین تب ن والی درجہ کو دریافت کرنے سے

ہم و اور ط کے نسبت آپسمین معلوم کر سکتے ہین چونکہ ط ایک مفروضہ وزن ہے

پس و معلوم کر سکتی ہین اسی طریقہ سے کوئی سے شئی وزن کیجا سکتے ہین

(۱۷۷) جسقدر فاصلہ اون دو نقطوں کی درمیان جنپر ط دو مفروضہ فرق کے وزنوں کا

ساکن سبکہنے کے لئے لٹکایا جاوے بڑا ہو اوسیقدر قوت حس مروجی سٹیل یارڈ

کے زیادہ ہوگی اس سے معلوم ہوتا ہے قوت حساس س اکے بڑہانے سے

یا ط کے گہٹانے سے بڑہتی ہے۔

فرض کرو کہ ن و ہ نقطہ ہے کہ جس سے وزن ط لٹکایا گیا ہے جبکہ وَ وزن کے

برابر ہے تو ط × د نَ = وَ × اس اور ط × د ن = و × اس

∴ ط × ن نَ = (وَ − و) اس

∴ ن نَ = $\frac{(\text{وَ} - \text{و})\,\text{اس}}{\text{ط}}$

چونکہ (وَ − و) مفروضہ ہے ∴ ن نَ بدلتا ہے $\frac{\text{اس}}{\text{ط}}$ کے ساتہہ اور بڑہتا ہے

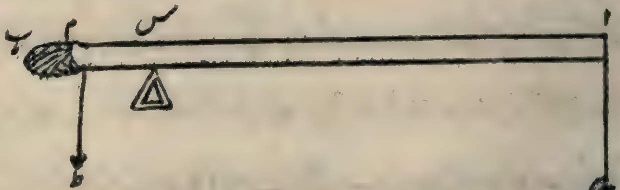
اسکی بڑہانے سے یا ط گہٹانے سے

چونکہ قوت حساس بدلتی ہے $\frac{\text{اس}}{\text{ط}}$ کے ساتہہ تو وہ ڈنڈی کے وزن سے غیر

متعلق ہے اور بیزان کے جگہہ سے بہی غیر متعلق ہے یعنی سٹیل یارڈ کا حساس

ایک سا ہی ہوگا خواہ اوس چیز کے جسکو وزن کرنا ہے کچہہ ہی مقدار ہو۔

(۱۷۸) ایک اور قسم کے ترازو کو ڈنش سٹیل یارڈ کہتے ہین یہہ ایک بہاری ڈنڈے سے ہوتی ہے جسکی سری پر ایک گانٹھ ہوتی ہے اور دوسری سری پر وہ چیز جسکا وزن کرنا ہو لٹکائی جاتی ہے اور اوسمین حامل متحرک ہوتا ہے



(۱۷۹) ڈنیش سٹیل یارڈ پر درجہ لگانی کا بیان

فرض کرو کہ اب ایک ڈنڈی ہے ط اوسکا وزن ہے م اوسکا مرکز ثقل ہے فرض کرو کہ جب حامل س پر ہے اور آسے و وزن کی چیز لٹکتی ہے تو سٹیل یارڈ حالت معادلت مین اور ڈنڈی حالت افقی مین ہے تو بموجب حد ۸۶ کے اگر مقیاس القوہ س کی گرد لین تو و × اس = ط × س م = ط (ام - اس)

∴ اس = $\frac{ط \times ام}{ط + و}$ و کو ط و ۲ط و ۳ط و ۴ط وغیرہ کی مساوی بناتے سے ہم حامل کے مقابل مقام ڈنڈی پر دریافت کرسکتے ہین

اگر ان مقامون کے درمیان درجے معلوم کرنا ہون تو و کو $\frac{۳}{۲}$ط و $\frac{۸}{۳}$ط $\frac{۱۵}{۴}$ط وغیرہ کی برابر بنانے سے معلوم ہوسکتا ہے

اگر و کے متواتر قیمتین سلسلہ حسابیہ مین ہون تو اس مقابل درجونکے فاصلے سلسلہ موسیقیہ مین ہونگے

سوالات باب دوازدہم

(١) اگر نابرابر بازؤنکی مجرار مین کوی چیز وزن کیجاوے اور ایک پلہ مین اوسکا وزن ا پونڈ ہو اور دوسری مین ب پونڈ تو ثابت کرو کہ اوس چیز کا اصلی وزن √(ا ب) پونڈ ہے

(٢) ایک چیز ایک پونڈ کے وزن کی جب نادرست مجرار کے ایک پلہ مین رکہی جاوے تو وہ ١٤ اونس کی وزن کے معلوم ہوتی ہے تو جب دوسرے پلہ مین رکہی جاوے اوسکا وزن کیا ہوگا۔

(٣) ایک ترازو کے بازؤنکی نسبت ١٩/٢٠ ہے وہ پلہ جسمین رکہی جاتی ہین بڑی بازو سے لٹک رہا ہے تو اوس چیز کا اصلی وزن جو ٣٨ پونڈ کے معلوم ہوتی ہے دریافت کرو

(٤) اگر ایک نادرست ترازو کی بازؤنکی نسبت ١٥/١٦ ہو تو بتاؤ کہ ایک خریدار کو ایک پونڈ چاہ کیواسطی حقیقت مین کیا دینا پڑیگا جو اوسکے پاس بڑی بازو سے بحساب تین شلنگ ٩ پنس فی پونڈ کے فروخت ہوتی ہے

—— مندرجہ ذیل ٦ سوال اسٹیل یارڈ سے متعلق ہین ——

(٥) اگر متحرک وزن ایک اسٹیل یارڈ کا ایک پونڈ ہو اور ایک سوداگر اوسکی بجای ٢ پونڈ کا وزن اپنی درجون سے استعمال کرے تو ثابت کرو کہ اگر مرکز ثقل اسٹیل یارڈ کا بڑی بازو مین ہو تو وہ اپنے خریدار کو دہوکا دیتا ہے اگر چہوٹے مین تو وہ خود دہوکا کہاتا ہے

(٦) متحرک وزن ایک پونڈ ہے اور ڈنڈیکا وزن بہی ایک پونڈ ہے اور فاصلہ نقطہ تعلیق کا اوس چیز سے جسکو وزن کرنا ہے ٢½ انچ ہے اور فاصلہ مرکز ثقل ڈنڈی کا اوس چیز سے ٣ انچ ہے تو بتاؤ کہ متحرک وزنکو کسجگہہ رکہنا چاہیئے تاکہ ٣ پونڈ کی چیز وزن کرین

(٧) اگر حامل ڈنڈیکو ٢/٣ نسبت مین تقسیم کرے اور ڈنڈیکا وزن متحرک وزن سے

برابر ہو تو بتاؤ کہ بڑی سے بڑی چیز جو وزن کیجا سکتی ہے متحرک وزن سے چار گنا ہے

(۸) اگر ڈنڈی ہموار ہو اور اوسکا وزن متحرک وزنکا $\frac{1}{م}$ حصہ ہو اور حامل کا فاصلہ ایک سرے سے ڈنڈیکے طول کا $\frac{1}{ن}$ وان حصہ ہو تو بتاؤ کہ بڑے سے بڑی چیز جسکا وزن کیا جا سکتا ہے متحرک وزن سے $\frac{۲م(ن-۱)+ن-۲}{م^۲}$ گن ہے

(۹) اگر متحرک وزن بڑا کیا جاوے تو بتاؤ کہ درجون مین کیا اثر ہوگا یعنی کیا فرق پڑیگا

(۱۰) اگر ڈنڈیکے مادہ کا وزن زیادہ کیا جاوے تو درجون مین کیا اثر ہوگا

(۱۱) ایک راست ہموار جسکا وزن ۵۰ پونڈ ہے اور طول ۶ فٹ ہے جب اوسکے ایک سرے سے ۱۰ پونڈ کا وزن لٹکایا جاوے تو حامل کے گرد حالت معادلت مین رہتا ہے تو بتاؤ کہ حامل کسجگہ ہوگا اور اوسپر کیا دباؤ ہوگا

(۱۲) ایک راست وزندار ہموار کے سر ن سے جسکا حامل اوسکی نقطہ تضیف پر ہے وزن ط اور ق لٹک رہے ہین اگر دونون بازو یکسان مٹاپی کی ہون اور وزن تینا نابرابر اور سب ملکر حالت معادلت مین ہون تو بتاؤ کہ بازو کی وزن کا فرق ط اور ق کے فرق سے دوگنا ہوگا

(۱۳) ایک یکسان وزندار سلاخ اب ۷ فٹ طول کے دو کیلون س اور د کی درمیان جنکا فاصلہ ایک دوسرے سے ۵ فٹ ہے حالت استقی مین ساکن ہے اور س کا فاصلہ ا سے نصف فٹ ہے تو کیلون پر دباو دریافت کرو

اگر ایک طاقت سرے ب سے ضعف فٹ کے فاصلہ پر اوپر کیطرف عمل کرے ا۔ ر کیل س کے

سے دباؤ کو زایل کر دے تو ثابت کرو کہ کیل دپر دباؤ اوسکی پہلی دباو کا نصف ہو

(۱۴) ایک لوہکی سلاخ کو جو مٹائی مین یکسان اور طول مین ۱۲ فٹ ہے دو آدمیون نے اوٹھایا ہوا ہے جنمین سے ایک ایک سرے پر ہے تو بتاؤ کہ دوسرا شخص کسجگہہ سے اوٹھا تا کہ اوسکو وزن کا ۳/۵ سہارنا پڑے

(۱۵) ایک وزندار یکسان مجرار پر جسکی بازوئکی نسبت ۲/۱ ہے دو وزن دو و پانچ تو کے لٹک رہے ہین اور اوسی حالت معادلت مین رکھتے ہین تو مجرار کا وزن بتاؤ

(۱۶) اگر ایک یکسان شہتیر س انچ لنبا دوستونون پر جو سرون سے آ اور ب انچ کے فاصلونپر واقع ہین سہارا ہوا ہو تو ستونونکے دباؤنکی نسبت معلوم کرو

(۱۷) ایک یکسان شہتیر ۱۰ فٹ لنبا اور وزنکا دوستونپر ایک ہے خط افقی مین رکھا ہوا ہے اسطور پر کہ اوسکے لنبائیکا ایک فٹ ایک ستونسے نکلا ہوا ہے تو ستونون کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو تا کہ ایک ستون پر دوسری ستون سے دوگنا بوجھ ہو او نیز دونون پر دباؤ دریافت کرو

(۱۸) ایک راست مجرار ۲۰ پونڈ وزن مین ایک حامل کی گرد جو اوسکی ایک سری سے اوسکی لنبائی کی ۱/۴ فاصلہ پر واقع ہے حرکت کرسکتا ہے تو بتاؤ کہ اوس سرے سے کتنا وزن لٹکانا چاہیئے کہ مجرار ہرجگہہ حالت معادلت مین ہو

(۱۹) ایک حمندار مجرار دو راست ہموار ہم طول سلاخون سے مشتمل ہے جو ۱۲۰ درجہ کے زاویہ پر مایل ہین اور حامل نقطہ تقاطع ہے اگر ایک سلاخ کا وزن دوسری سے دوگنا ہو تو بتاؤ کہ مجرار حالت معادلت مین تب ہوگا جب کم وزن کے سلاخ حالت افقی مین ہو

(۲۰) دو آدمی ایک یکسان تختہ ۶ فٹ لنبی کے جو دو ہنڈرویٹ وزن مین ہے

و ٹہاتی ہین اور ایک سر سیے دو فٹ کے فاصلہ پر ایک ہندرویٹ کا وزن رکھا گیا ہو
گر ایک آدمی اس سر کو اپنے کاندہی پر رکہی ہوئی ہو تو بتاؤ کہ دوسری آدمی کو کسجگہہ سے
تختہ کو اوٹہانا چاہیئے تاکہ دونون کو برابر وزن سہارنا پڑے

(۲۱) ایک استوانہ نما سلاخ کے ایک فٹ لمبی اور آٹہہ پونڈ وزن دوسری ہم شکل
سلاخ لوہیکی ساتھہ جو ۱۵ انچ لمبی اور ٦ پونڈ وزن مین ہی ایک ہی راست خط مین
جوڑی گئی ہے تو بتاؤ کہ کس نقطہ پر خط افقی مین دونون کے حالت معادلت ہو گے

(۲۲) ایک مثان مین یکسان سلاخ دس فٹ لمبی اور ۴۸ پونڈ وزن مین ایک
ستون سے جو اوسکی ایک سری پر ہے سہاری گئی ہے تو اوس طاقت کے مقدار
دریافت کرو جو دوسری سے دو فٹ کے فاصلہ پر سمت الراس مین اوپر کیطرف عمل
کرکے سلاخ کو حالت افقی مین رکہی

(۲۳) ایک یکسان موٹی سلاخ ایک سرے سے لٹکتے ہے اور اگر دوسری سر پر ایک
مفروضہ افقی طاقت عمل کرے تو سلاخ کے حالت معادلت دریافت کرو

(۲۴) دو وزن ایک یکسان مجرا کے سر وںسے حامل کے مخالف سمتون مین عموداً
ساکن رہتی ہے اگر ایک وزن دوسرے سے دوگنا ہو لیکن مجرا کا وزن اونکی حاصل جمع
کے برابر ہو تو بتاؤ کہ حامل کہان ہونا چاہیئے

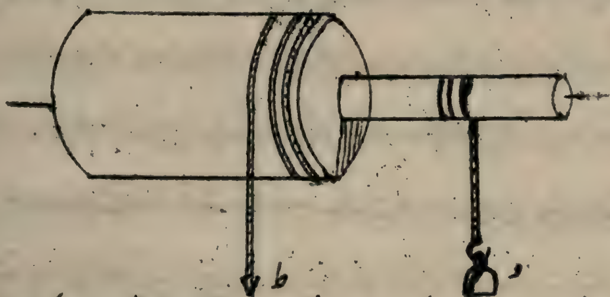
(۲۵) اگر مروجہ سٹیل یارڈ متحرک وزن کیو اسطے ٹہیک بنایا گیا ہو تو بتاؤ کا اگر
ط کو ن ط کیا جاوے اور مرکز ثقل سٹیل یارڈ سے ایک وزن ان - اگنا
سٹیل یارڈ کے وزن کا لگایا جاوے تو وہ سٹیل یارڈ پہر بہی ٹہیک ہو گا

تیرہوان باب

چرخ و محور اور دندانہ دار چرخ کے باب مین

(۱۸۰) ہم اسباب مین چرخ و محور و دندانہ دار چرخ کا بیان کرینگے یہان معلوم ہوگا کہ یہہ دونون کلین صرف مجرار کی اقسام ہین

(۱۸۱) چرخ اور محور کے بیان مین۔ یہہ کل دو استوانون سے جنکا ایک محور

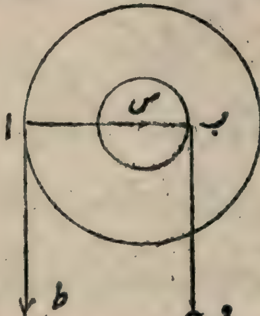


ہوتا ہے مشتمل ہوتی ہے بڑی استوانے کو چرخ اور چھوٹے کو محور کہتے ہین یہہ دونون استوانی مشترک محور کے ساتھہ مضبوط طور پر پیوستہ ہوتے ہین اور محور حالت افقی مین اسطرح سہارا جاتا ہے کہ کل اوسکے گرد پھر سکتے ہے وزن ایک رسی سے جو کہ محور کے گرد لپٹی ہوئی ہوتی ہے۔ عمل کرتا ہے اور طاقت ایک رسی سے جو چرخ کے گرد پیچیدہ ہوتی ہے عمل کرتی ہے طاقت اور وزن کو محور کے گرد مخالف سمتون مین گھمانیکی قابلیت رکھتے ہین

(۱۸۲) جب چرخ اور محور حالت معادلت مین ہون تو طاقت کو وزن سے وہ نسبت ہوگی جو نصف قطر محور کو نصف قطر چرخ سے

فرض کرو کہ دو دوایر جنکا مشترک مرکز س ہے جداگانہ چرخ اور محور کے

اون قطعون کو تعبیر کرتے ہین جو استوانہ کے محور پر عمود دار سطحون سے پیدا ہوتی ہین کہ طاقت اور وزن کے عمل مین کچہہ فرق نہو گا



اگر ہم فرض کرین کہ وہ دونون ایک ہی سطح مین جو محور پر عمود دار ہو عمل کرین فرض کرو کہ رسّی جسکے ذریعہ سے طاقت ط عمل کرتی ہے چرخ کو ا پر چھوڑتے ہے اور رسّی جس سے وزن و عمل کرتا ہے محور کو نقطہ ب پر چھوڑتے ہے تو س ا اور س ب ط اور و کے خط تحریک پر عمود ہونگے ہم اس س ب کو ایک مجزار جبکا س حال ہے فرض کرسکتے ہین پس بموجب حد ۱۶۵ کے حالت معادلت کے شرائط کیواسطے $\frac{ط}{و} = \frac{س ب}{س ا}$ کافی اور ضروری شرط ہے

(۱۸۳) اگر ہم اون رسیونکی مٹائی جس سے ط اور و عمل کررہین ہے حساب مین لین تو ہمین ہر ایک طاقت کے سمت عمل کو رسّی کے مٹائی وسط سے منطبق فرض کرنا ہوگا ۔

پس شرائط معادلت مین س ا نصف قطر چرخ کامعہ نصف مٹائی رسّی کے جس سے ط عمل کررہے ہے ظاہر کریگا اور س ب نصف قطر محور کامعہ نصف مٹائی رسّی کی جس سے و عمل کررہے ہے ظاہر کریگا

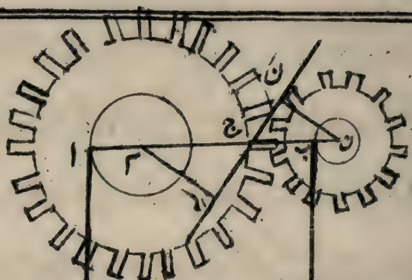
(۱۸۴) ہمنے فرض کیا ہے کہ طاقت چرخ اور محور مین بذریعہ رسّے کی عمل کرتی ہے لیکن بذریعہ دہتہ کے بہی عمل کرسکتی ہے جیسا کہ مثال چرخی کی جس سے پانی

بوکا کہوئین سے نکالتے ہین

ونڈلیس اور کیپ سٹین بہی ایک قسم کے محور اور چرخ ہین - ڈنڈلیس بعینہ کوئین سے پانی نکالنے کے آلہ کیطرح ہوتا ہے کیپ سٹین مین محور سمت راس مین ہوتا ہے ہاتہہ جو کہ ایک طاقت کے بجائی ہوتا ہے افقی سطح مین ایک دایرہ بناتا ہے اور رسی جسکی ساتہہ وزن بندہا ہوا ہوتا ہے محور سمت افق مین جاتی ہے

(۱۸۵) حد ۱۸۴ مین جو چرخ اور محور کا بیان ہوا ہے کل دباؤ اوس حصہ پر جس سے کل سہاری گئی ہے وزن اور طاقت کی حاصل جمع کے برابر ہے کیونکہ یہہ کل مجرا کے مشابہ ہے جسپر متوازی ایک جانبہ طاقتین عمل کرتی ہین اگر طاقت سمت الراس مین اوپر کیطرف عمل کرے تو چونکہ طاقت اور وزن کل کے محور کی ایک ہی طرف ہونگی تو کل دباؤ اوس حصہ پر جس سے کل سہاری جاتی ہے وزن اور طاقت کی حاصل تفریق کے برابر ہوگا لیکن ڈنڈلس اور کیپ سٹن مین اگرچہ طاقت اور وزن اونکی نصف قطر پر عمود وار عمل کرتی ہین لیکن یہہ ضرور نہین کہ وہ متوازی سمتون مین عمل کرین ایسی حالتون مین دباؤ اوس حصہ پر جس سے کل سہاری جاتی ہے متوازی الاضلاع کے قاعدہ سے دریافت کرنا چاہیئے

(۱۸۶) دندانہ دار چرخ کا بیان - دو لکڑی یا دہات کی دایرونکے محیطون مین برابر فاصلونپر دندانے کٹی ہوتے ہین - فرض کرو کہ دایرے اپنے محورونکے گرد جو اونکی سطحونپر عمود دار ہوتے ہین پہر سکتے ہین اور فرض کرو کہ اونکی محور متوازی ہین اسطرح جیسے کہ اونکے کنارے ایک دوسری سے مس کرتے ہے یعنے ایک دندانہ ایک کا دوسرے کے دو دندانونکے درمیان



واقع ہوتا ہے - اگر ایک چرخ ان دونون مین سے اپنے محور کے گرد کسی ذریعہ سے گردش کہائے تو دوسرا چرخ بہی اپنے محور کی گرد پہرنے لگیگا یعنی ایک طاقت جو ایک طرف پہرانا چاہے ایک دوسری کافی طاقت سے جو دوسری چرخ کو مخالف سمت مین پہیرنا چاہتے ہے حالت معادلت مین رہ سکتی ہے

(١٨٧) جبکہ ہر دو چرخ دندانہ دار حالت معادلت مین ہین تو طاقت اور وزنکی مقیاس القوۃ اپنے اپنے چرخی مرکز کی گرد جداگانہ ایکدوسریسے وہ نسبت رکہینگی جو ان عمودون مین ہوتے ہون جو چرخون کی مرکزون سے دندانہ مس کنندہ کی درمیانی دباو کے سمت پر کہینچے جاوین

فرض کرو کہ م اور ن دونون چرخون کے مرکز ہین ط طاقت اور و وزن ہے جو بذریعہ رسیون کے چرخونکے ہم مرکز محورون کے ساتہہ لٹکی ہوئی ہین عمل کرتے ہین

فرض کرو کہ رسیان نقاط ا اور ب پر محورونسے جداگانہ ہوتی ہین پس م ا اور ن ب ان کی سمتونپر عمود ہونگے

فرض کرو کہ ق ادس باہمی دباو کو تعبیر کرتا ہے جو دونون دندانونکے ملنے سے پیدا ہوتا پس ایک طاقت ق نقطہ س پر دونون چرخونپر مخالف سمتونمین عمل کرتے ہے م اور ن سے طاقت ق کے خط میلان پر عمود ڈالو او سخط کو نقاط مَ اور نَ پر قطع کرین پس چونکہ چرخ ح م کے گرد حرکت کرسکتا ہے م کے گرد مقیاس القوة برابر ہونے چاہیئے یعنے ط × ام = ق × م مَ

اسیطرح چونکہ چرخ خ جو ن کے گرد حرکت کرسکتا ہے ن کے گرد مقیاس القوة برابر ہونگے یعنی د × ب ن = ق × ن نَ ۔

پس $\frac{\text{ط} \times \text{ا م}}{\text{د} \times \text{ب ن}} = \frac{\text{ق} \times \text{م مَ}}{\text{ق} \times \text{ن نَ}} = \frac{\text{م مَ}}{\text{ن نَ}}$ اس سے شکل ثابت ہوجاتے ہی

خط مستقیم م ن درمیان نقاط م اور ن کے کہینچو جو مَ نَ کو نقطہ ج پر قطع کرے

پس بموجب مثلث مشابہ کے گرد $\frac{\text{م مَ}}{\text{ن نَ}} = \frac{\text{م ج}}{\text{ن ج}}$

اگر دندانے بمقابلہ نصف قطر چرخونکے بہت چہوٹے ہون تو نقطہ ج دندانونکے نقطہ تماس سے قریباً منطبق ہوگا اور م ج اور ن ج تخمیناً چرخونکے نصف قطرونکے برابر ہونگے پس یہہ نتیجہ قریبا حاصل ہوگا کہ

$$\frac{\text{مقیاس القوة ط کا م کی گرد}}{\text{مقیاس القوة د کا ن کی گرد}} = \frac{\text{نصف قطر طاقت کی چرخ خ کا}}{\text{نصف قطر وزن کے چرخ ح کا}}$$

(١٨٨) اصل مین یہہ کل حرکت دینی کے واسطے کام مین آتے ہے اور اسصورت مین یہہ حرکت کا بڑا لحاظ رکہنا چاہیئے تاکہ حرکت مساوی پیدا ہوتی رہے اور سطحین رگڑ سے اسباب مین طالب العلم کو کوی خاص کتاب

شکلون کے باب مین پڑہنے چاہیئے

(۱۸۹) دندانہ دار چرخ بہت استعمال مین آتے ہین مثلا دخانی کلون مین اور گہڑی گنہٹون مین

یہہ چرخ بعض وقت بذریعہ چمڑون کی تسمونکے جو اونکے محیطونکے گرد لپٹی ہے اور اونکی سطح مین تہوڑا اگٹاو ہوتا ہے جو تسمونکو پہسلنے نہین دیتا

سوالات نمبر ۱۲

(۱) اگر ڈیڑہ پونڈ کے طاقت ۲۸ پونڈ وزنکو اوٹہاتی تو چرخ کا نصف قطر کیا ہوگا جبکہ محور کا قطر ۶ انچ ہو

(۲) اگر محور کا نصف قطر ڈیڑہ فٹ ہو اور چرخ کا نصف قطر $\frac{1}{4}$ ۳ فٹ تو تین پونڈ کے طاقت جو چرخ پر عمل کرتے ہے محور پر کسقدر وزنکو سہار سکیگی۔

(۳) ایک آدمی جس کا وزن ۱۲ اسٹون ہے ۱۵ ہنڈرویٹ کا وزن اپنے وزن سے سہارنا چاہتا ہے تو بتاؤ کہ چرخ اور محور کسطرح بنانا چاہیئے کہ وہ اپنا مطلب حاصل کرسکے

(۴) ۱۲ اونس وزنکو چرخ اور محور پر ایک طاقت اوٹہاتی ہے دونونکے نصف قطر ۲۸ انچ ہین اگر دونونکے نصف قطر بقدر ۴ انچ کے کم کیجاوین بتاؤ کہ وہی طاقت کو وزنکو اوٹہاسکے گے

(۵) اگر چرخ اور محور کے نصف قطر مین وہ نسبت ہو جو ۸ : ۲ اور اونکے محیطونسے جداگانہ ۶ پونڈ اور ۱۵ پونڈ کے اوزان لٹکتے ہون تو بتاؤ

کہ کونسا وزن نیچے اتریگا - فرض کرو کہ جو وزن نیچے اترتا ہے اوسکو ٹیک سے سہارا جاوے تو بتلاؤ کہ ٹیک پر کسقدر دباؤ ہوگا اور چرخ اور محور کے حصہ پر کیا دباؤ ہوگا

(۶) ایک کیپ سٹین کے محور کا نصف قطر دو فٹ ہے اور ۶ آدمی ہنڈرویٹ کے طاقت سے اوسکے سلاخونپر جو پانچ فٹ لنبی ہین گھماتے ہین تو بتاؤ کہ کسقدر وزنکو اوٹھائیگے

(۷) ایک چرخ اور محور کے قطرونمین ۲ فٹ ۶ انچ فرق ہے اور وزن طاقت سے ۶ گنا ہے تو چرخ اور محور کے نصف قطر دریافت کرو

(۸) اگر چرخ کا نصف قطر محور کے نصف قطر سے سہ چند ہو اور چرخ کی رسّے صرف ۶ پونڈ کے کشش کے برداشت کر سکے تو بتاؤ کہ زیادہ سے زیادہ وزن کتنا اوٹھہ سکیگا -

(۹) اگر رسے جس سے وزن ہنبا ہوا ہو محور کے گرد لپٹی ہوئی ہو لیکن وہ رسے جس سے طاقت عمل کرتی ہے چرخ کے محیطی مٹائی کے کسے نقطہ سے بندہی ہوئی ہے تو جس حالت مین طاقت اور وزن برابر ہون حالت معادلت دریافت کرو -

(۱۰) اگر چرخ اور محور مین دونون رسیان اپنے اپنے گرد لپٹی ہوتی ہون اور اونکی مٹائی بہی شمار مین لایجاوے اگر وزن اوسپر اوٹھایا جاوے طاقت اور وزنکے نسبت باہمی زیادہ ہوگے یا کم -

فرض کرو کہ دونون رسیان کے مٹائے برابر ہے

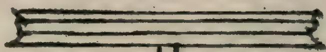
۱۴ باب

چرخی یا گھرنے کے باب مین

(۱۹۰) چرخی ایک چھوٹی گول چکر یعنی چوبی دایرہ کو کہتے ہین جو ایک محور کی گرد جو اوسکی مقابلہ دایرہ وسکے مرکز و نمین سے گذرتا ہے اور محور کے دونون سری ایک معلّق سے جسکو بلاک کہتے ہین سہارے ہوئی ہوتے ہین

اس دایرہ کے کنارونپر تہوڑا سا کٹا دہوتا ہے جسپر سے رسی چل نہین سکتے

(۱۹۱) فرض کرو کہ ا ایک چرخی ہی جسکا حامل یا معلق غیر متبدل ہے اور اس چرخی پر سے ایک رسی گذرتی ہی جسکے انجام مین ایک وزن بندہا ہوا ہے اگر رسیکو دوسری طرف ورنکی مساوی طاقت سے کہینچین تو حالت سکون مین ہوگی



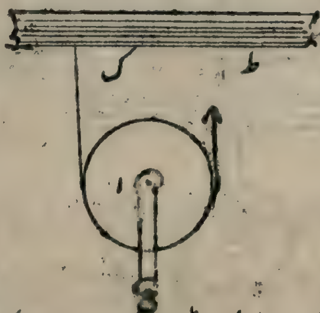
پس غیر متبدل چرخی کے ذریعہ سے ہم ایک طاقت کی سمت بدل سکتے ہین بغیر اوسکے مقدار بدلنے کے اس باب مین ہم یہہ بیان کرینگے کہ متحرک چرخی سے کل کا فایدہ حاصل ہو سکتا ہے

اگرچہ ثبوت کیواسطے یہہ بات کہ گھرنی اپنے محور پر حرکت کر سکتے ہی کچہہ ضرور نہین مگر واسطے عمل مین یہہ بہت کارآمد ہے جب گھرنے محور کے گرد گھوم

سکتی ہے تو رسی پر کے کشش حالت سکون مین گہرنے کے دونون طرف عین برابر ہوتے ہے لیکن اگر گہرنے گہوم نہ سکے تو گہرنے کے دو طرف رسی پر کے کشش مین بہت فرق ہو جاتا ہے اسکا باعث تحکیک ہے

اتنکا لمین ہم یہہ فرض کرلیتے ہین کہ گہرنیکے گرد ڈورون کے گذرنے سے ڈورنکے کشش مین کچہہ فرق نہین آتا ہم ڈورون اور گہرنیون کے وزنون کو شمار مین نہین لائینگے جبتک کہ اسکی برخلاف نہ کہا جاوے

(۱۹۲) کسی متحرک گہرنے پر جبکہ رسیان دونون طرف متوازی ہون اور حالت معادلت مین ہون تو وزن طاقت سے دوگنا ہوتا ہے



فرض کرو کہ ا گہرنے گرد ایک رسی لپٹی ہوئی ہے جسکا ایک سرا نقطہ ک پر بندہا ہوا ہے اور دوسرے سرے کو ط عمود اوپر کیطرف کہینچتے ہے اور وزن و گہرنیکے قلابہ سے لٹکتا ہے

رسی کے کشش سب جگہہ برابر ہے پس ہم فرض کرسکتے ہین کہ گہرنے پر دو متوازی طاقتین اوپر کیطرف عمل کرتے ہین اور ہرایک انمین سے ط کے برابر ہے اور تیسری طاقت و نیچے کیطرف عمل کرتے ہے پس و = ط کے

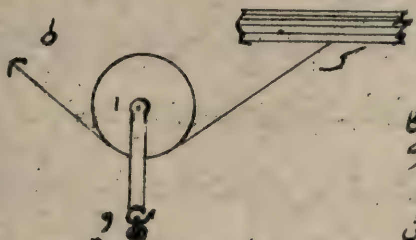
خیال رکھنا چاہئے کہ د کا خط میلان رسّی کے دونون حصون سے برابر فاصلہ پر ہو یعینے گھرنے کے مرکز مین سے ہو کر گذرے

نقطہ معینہ ک پر دباو مساوی ط کے یعینے نصف وزن و کے ہے

بعضی وقت رسی جس سے طاقت ط عمل کرتے ہے ایک معین گھرنے کے اوپر گذارے ہے اور اسحالت مین ط نیچی کیطرف عمل کرتے ہے

(۱۹۳) پہلی حد مین گو مبتدیکو کچھ مشکلات معلوم نہین ہونگے تاہم اسقدر تشریح واجب ہے گھرنے اور اوسکا قلابہ حقیقت مین دو علیحدہ اجسام ہین مگر حالت معادلت مین اون دونون کو اگر ایک ہی فرض کر لین تو کچھ فرق نہو گا اور اسصورت مین ۶۲ حد کے شرایط معادلت عاید ہو سکینگے بعض دفعہ شرایط معادلت قایم کرنیکو اسطلے اصول مجرار استعمال ہوتا ہے اس اصول کے استعمال کرنیکا طریقہ یہہ ہے کہ گھرنے کا چکّر اپنے محور پر گھوم سکتا ہے اور معادلت کیو اسطے یہہ ضرور ہے کہ طاقتونکے معیاسس القوت اس محور کے گرد برابر ہون یہہ شرط پورے ہو جاتی ہے اگر محور رسّی کے دونون حصونسے برابر فاصلہ پر ہو محور پر دباؤ دونون طاقتونکے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے اور یہہ دباؤ قلابہ کے ذریعہ سے سہارا جاتا ہے پس قلابہ پر طاقت ۲ ط اوپر کیجانب اور د نیچے کے جانب عمل کرتی ہے پس و برابر ۲ ط کے علاوہ برین حد مذکورہ بالا مین رسیونکو گھرنے سے متصل فرض کرنے سے اونکے حرکت کا حال بہتر معلوم ہو سکتا ہے اسصورت مین ایک جسم سخت جسکا وزن و ہے دو رسیون کے کششون سے سہارا ہوا ہے جو اون نقاط پر عمل کرتی ہین جہانپر رسی گھرنیکو چھوڑتی ہے

(۱۹۴) ایک واحد متحرک گہرنے پر قوت اور وزن کی نسبت دریافت کرنا جبکہ رسی



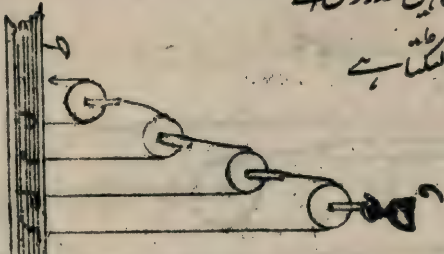
کے حصے متوازی نہین ہین ایک رسے گہرنے ا کی گرد لپٹی ہوئی ہے جسکا ایک سرا نقطہ ک پر بند ہا ہوا ہے اور دوسرا سرے پر طاقت ط عمل کرتی ہے اور وزن و گہرنی کی قلابے سے لٹکتا ہے رسّی کی کشش اس جگہہ برابر ہے پس گہرنے پر دو طاقتین اوپر کیجانب عمل کرتے ہین اور دونوںمین سے ہر ایک ط کے برابر ہے اور وزن نیچے کے جانب عمل کرتا ہے پس وزن و کا خط میلان ضرور اوس زاویہ کی تنصیف کرتا ہے جو دونون طاقتین ط باہم پیدا کرتی ہین یعنے رسی کے دونون حصے عمودوار خط کے ساتھہ باہم زاویہ پیدا کرتے ہین فرض کرو کہ انمین سے ہر ایک زاویہ آ ہے پس وزن و دونون مساوی طاقت ط کے جو باہم ۲ آ زاویہ پیدا کرتے ہین حاصل کے مساوی اور مخالف ہوگا اسطرحسے ط اور و کے نسبت طاقتون کی متوازی الاضلاع سے معلوم ہوتا ہے

بموجب ہو کے و = ط × جم ا ۔

(۱۹۵) اب ہم گہرنیون کے مختلف اجتماعونکا بیان کرتے ہین

(۱۹۶) اگر ایسا گہرنیونکا نظام جسمین ہر ایک گہرنے علیحدہ علیحدہ معلّق ہو اور ایک دوسرے کے متوازی ہون تو وزن برابر ہوگا طاقت ۲^ن جہان ن گہرنیون کے تعداد ہے اس نظام مین وہ رسی کا جو بالائے گہرنے کے سوا اور گہرنیونکے اوپر لپٹی ہوئی ہے ایک سرا ایک نقطہ معین سے بندہا ہے اور دوسرا سرا اپنے سے اونچی گہرنے کے قلابے سے مگر سب سے بالائی چرخی کے رسی کا ایک سرا تو حامل سے بندہا ہوا ہے اور دوسری سری پر طاقت عمل

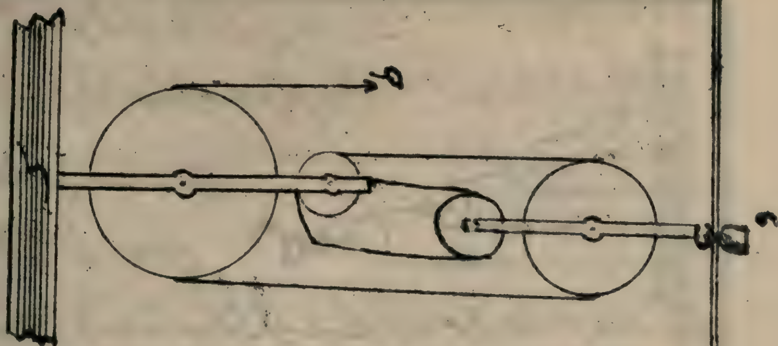
کرتا ہے۔ فرض کرو کہ چار متحرک گھرنی ہین اور و وزن ہے
جو سب سے نچلے گھرنیکے قلابہ سے لٹکتا ہے
اور طاقت پ سب سے اونچی
گھرنی کے رسّی سے اوپر



کیجانب عمل کرتی ہے تو واحد متحرک گھرنے کے موجب اصول کے اوس رسے کی کشش جو سب سے نچلی گھرنے پر لپٹی ہوئی ہے و/۲ کے برابر ہے اوسیطرح سے اوس سے بالای گھرنیکی رسّی کے کشش و/۲۲ ہے علیٰہذا القیاس اس سے بالای گھرنیکے رسّی کے کشش برابر ہے و/۲۳ اور چوتھی گھرنیکے رسی کے کشش و/۲۴ اور یہہ اخیری رسّی کے کشش ہے طاقت پ کے برابر ہونی چاہیئے پس ط برابر ہے و/۲۴ یا و = ۱۶ × ط اسیطرح سے اگر متحرک گھرنیوں کے تعداد ن ہو تو و = ہوگی ۲ن × ط
اس نظام کو گھرنیوں کا اوّل نظام کہتے ہین

(۱۹۷) فرض کرو کہ ک ل م ن وہ نقاط ہین جہاں رسیوں کے انجام حامل سے بندہے ہین پس نقطہ ک پر دباؤ برابر ہوگا و/۲ اور ل پر و/۲۲ اور م پر و/۲۳ اور ن پر و/۲۴ ان دباؤں کا حاصل جمع برابر ہے و(۱/۲ × ۱/۲۲ × ۱/۲۳ × ۱/۲۴) اور اس سلسلہ ہندسیہ کے حاصلجمع برابر ہے و(۱ − ۱/۲۴)
پس دباؤں کی حاصلجمع معہ طاقت کل وزن کے برابر ہے

(۱۹۸) اوس نظام مین جسمین ایک ہی رسے تمام گھرنیوں پر گندھتے ہوں اور اسکے حصّے مابین گھرنیوں کے متوازی ہوں حالت معادلت مین وزن برابر ہوتا ہے طاقت مضروب پنچ کے قلابے کے رسیوں کے تعداد کے فرض کرو کہ نچلے



قلابے مین چار رسّیان ہین اور وزن و نیچیکے قلابے سے لٹکتا ہے اور طاقت
ط رسیکے ایک سرپے نیچے کے طرف عمل کرتے ہے رسیکے کشش سب جگہہ یکسان
اور ط کے مساوی ہے پس نیچیکے قلابے پر چار متوازی طاقتین اوپر کیجانب عمل کرتے
ہین جسمین سے ہر ایک ط کی برابر ہے اور طاقت و نیچے کے جانب عمل کرتی ہے
پس و = ۴ ط کے اسیطرح سے اگر نیچے کے قلابے پر رسیونکی تعداد ن ہو تو و = ن ط کی
اس گہرنیونکے نظام کو گہرنیونکا دوسرا انتظام کہتے ہین ۔

(۱۹۹) شکل مذکورہ بالا مین رسّی کا ایک سرا قلابے سے بندہا ہے اور رسیونکی تعداد
جفت ہے اگر رسّی کا سرا نیچے کے قلابے سے بندہا ہو تو رسیونکی تعداد نیچلی قلابے
پر طاق ہوگی اس شکل مین اوپر کی قلابے مین رسیونکی تعداد پانچ ہے پس نقطہ
تعلیق ک پر دباو برابر ہے پانچ ط کی یعنے (و + ط) کے

(۲۰۰) گہرنیونکے ایسے نظام مین جسمین ہر ایک رسّے وزن کے ساتھہ پیوستہ ہو
اور تمام رسّیان متوازی ہون اگر معدلت ہو تو وزن برابر ہوگا طاقت مضروب ۲ن - ۱
جہان ن گہرنیونکی تعداد ہے اس سلسلہ مین ہوا اور کسی گہرنے پر گذرتے ہے
ایک انجام سے وزن مفروضہ کے ساتھہ بندہی ہوتی ہے اور دوسری انجام سے

اپنے سے نیچے کے گھرنی کے قلابی سے بندہی ہوئی ہے جو رسی سب سے
نیچی کے گھرنی پر سے گذرتی ہے اوسکا ایک سرا وزن کی ساتھہ بندہا ہوا ہے
اور دوسری سے طاقت عمل کرتی ہے سب سے اونچی گھرنی قایم ہے اور
باقی سب متحرک



فرض کرو کہ ۴ گھرنیان ہین و وزن ہے اور ط طاقت جو سب سے نیچی گھرنی
سے عمل کرتی ہے سب سے نیچے کے گھرنی کے رسی کے کشش ط ہے اور اس
سے اونچی گھرنی کے رسی کے کشش ۲ × ط ہے اور اوس سے اونچی گھرنی کے
رسی کے کشش = $۲^{۲}$ × ط ہے اور وزن ان سب کششون کے حاصل جمع کے برابر
ہے پس و = ط + ۲ط + $۲^{۲}$ط + $۲^{۳}$ط) = ط(۱ + ۲ + $۲^{۲}$ + $۲^{۳}$) = ط ($۲^{۴}$ − ۱)
اسیطرح سے اگر ن گھرنیونکی تعداد ہو تو و = ط ($۲^{ن}$ − ۱) اس نظام کو گھرنیونکا
تیسرا نظام کہتے ہین

(۲۰۱) نقطہ تعلیق ک پر دباو برابر ہے ۲ × $۲^{۳}$ ط یعنی $۲^{۴}$ ط یعنی (وط)

(۲۰۲) ابتک ہمنی گھرنیونکے وزن کا کچہہ لحاظ نہین کیا مگر ابہم گھرنیونکا وزن
بہی محسوب کرینگے

(۲۰۳) (ہد ۱۹۲) مین فرض کرو کہ وَ گھرنیکا وزن ہے پس اسصورت
مین و کے بجای صرف و + وَ حالت معادلت مین رکہنا پڑیگا یعنے

وَ+۲ ط علیہذا القیاس حد ۱۹۴ مین و + وَ = ۲ طاجم ۱- حد ۱۹۸ مین
فرض کرو کہ وَ نیچیکے قلابے کے سب گھرنیونکا وزن ہے پس و + وَ = ۴ ط

(۲۰۴) حد (۱۹۶) مین فرض کرو کہ چار گھرنیون کا وزن نچی سے شروع ہوکر جداگانہ و لا ی ء ہین تو کشش اوس رسے کے جو نچی کے چرخے مین گذرتی ہے مساوی ہے $\frac{1}{2}$ + (و+وَ) کشش دوسرے رسّی کے = $\frac{1}{2^2}$ (و+وَ) + $\frac{1}{2}$ لا اور کشش تیسرے رسّی کے = $\frac{1}{2^3}$ (و+وَ) + $\frac{1}{2^2}$ لا + $\frac{1}{2}$ ی
اور کشش چوتھی رسی کے = $\frac{1}{2^4}$ × (و+وَ) + $\frac{1}{2^3}$ لا + $\frac{1}{2^2}$ ی + $\frac{1}{2}$ ء
اسطرح سے ط = $\frac{و}{2^4} + \frac{وَ}{2^4} + \frac{لا}{2^3} + \frac{ی}{2^2} + \frac{ء}{2}$

حقیقت مین ط ایک ہی وقت مین و کو اور وَ کو بذریعہ چار چرخیونکے اور لا کو بذریعہ تین چرخیونکے اور ی کو بذریعہ دو چرخیونکے اور ء کو بذریعہ ایک چرخیکے سہارتی ہے

اگر وزن ہر ایک چرخیکا برابر ہو وَ کے تو ط = $\frac{و}{2^4}$ + وَ $\left\{\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\right\}$ =
$\frac{و}{2^4}$ + وَ $\left(1 - \frac{1}{2^4}\right)$

اسیطرح سے اگر ن چرخیونکے تعداد ہو اور وزن ہر ایک چرخیکا وَ ہو تو

$$ط = \frac{و}{2^ن} + وَ\left(1 - \frac{1}{2^ن}\right) \quad یا \quad ط - وَ = \frac{و - وَ}{2^ن}$$

(۲۰۵) حد (۲۰۱) مین فرض کرو کہ وَ وزن سب سے نیچیکے چرخیکا لا دوسری کا اور ن تیسرے کا - تو اوس رسّی کی کشش جو سب سے نیچی چرخی کے گرد لپیٹی ہے ط ہے دوسری رسی کے کشش ۲ ط + وَ اور تیسری کی کشش = 2^2 ط + ۲ وَ + لا اور چوتھی رسی کی کشش = 2^3

اسیطرحسے و = ط $(۱ + ۲ + ۲^۲ + ۲^۳)$ + و $(۱ + ۲ + ۲^۲)$ + ۲^۲ وَ + ۲ لا + ی

لاَ $(۲^۲ - ۱)$ یہان سے وایک ہے وقت ط کے عمل سے بذریعہ چار چرخیونکے اور وَ کے عمل سے بذریعہ تین چرخیون کے اور لا سے بذریعہ دو کے اور ی سے بذریعہ ایک کے سہارا گیا ہے —

اگر ہر ایک وزن چرخی کا ایک ہی ہو اور مساوی وَ کی ہو تو و = ط × $(۲^۴ - ۱)$ + وَ $(۲^۳ + ۲^۲ + ۲ - ۳)$ = ط $(۲^۴ - ۱)$ + وَ $(۲^۴ - ۵)$

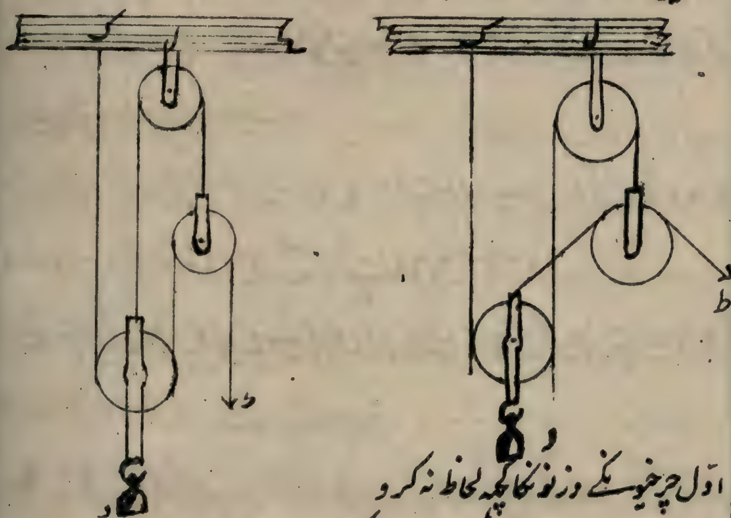
اسیطرحسے اگر ن تعداد چرخیونکے ہو اور وَ ہر ایک چرخے کا وزن ہو و = ط $(۲^ن - ۱)$ + وَ $(۲^ن - ن - ۱)$

(۲۰۹) اگر وزن چرخیونکا محسوب ہو تو معین نقطونکے دباؤ کے قیمتین جو کہ اگلی حدود مین دئی گئے ہین کچھہ مختلف ہونگے یہہ اختلاف کرنے مین کچھہ دقت ہوگی ہم حد (۱۹۷) کو بطور مثال لیتے ہین (حد ۲۰۲) کے عمل سے ک پر دباو = $\frac{۱}{۲}$ (و + وَ) اور ل پر = $\frac{۱}{۲}$ (و + وَ) $\frac{لا}{۲}$ اور م پر = $\frac{۱}{۲^۲}$ (و + وَ) + $\frac{لا}{۲^۲}$ + $\frac{ی}{۲}$ اور ن پر = $\frac{۱}{۲^۲}$ (و + وَ) $\frac{لا}{۲^۲}$ + $\frac{ی}{۲^۲}$ + $\frac{ع}{۲}$

اسلئے ان دباؤ ونکے حاصل جمع = و $(۱ - \frac{۱}{۲^۴})$ + وَ $(۱ - \frac{۱}{۲^۴})$ + لا $(۱ - \frac{۱}{۲^۳})$ + ی $(۱ - \frac{۱}{۲^۲})$ + ع $(۱ - \frac{۱}{۲})$ = و + وَ + لا + ی + ع − ط

---

(٢٠٧) چرخیونکے اور بہی دو نظام ہین جو کہ ... بارٹن کہلاتے ہین-
وہ ذیل کے شکلونسے ظاہر ہونگے



اوّل چرخیونکے وزنونکا کچہہ لحاظ نہ کرو
بائین ہاتہہ کے شکل مین و = ۴ ط نقطہ معین ک پر دباو = ط اور نقطہ ل پر = ۴ ط
داہین ہاتہہ کے شکل مین اوس زاویہ کو دو حصون رسی کے درمیان ہے
جو اوپر والے متحرک چرخے کے گرد گذرتے ہے اول فرض کیا جاوے تو و =
۵ ط جم ا دباؤ نقطہ ک پر ٢ ط جم ا اور نقطہ ل پر ۴ ط جم ا دوم - فرض کرو
کہ نیچے کے متحرک چرخے کا وزن وَ ہے اور اوپر کے متحرک چرخی کا لا ہی تو بائین
شکل مین و + وَ = ۴ ط + لا نقطہ معین ک پر دباؤ ط ہے اور نقطہ معین لا پر
۴ ط + ٢ لا -
دوم داہین ہاتھ کے شکل مین و + وَ برابر ہے ۵ ط جم ا + ٢لا دباؤ نقطہ ک پر =
٢ ط جم ا + لا اور نقطہ ل پر ۴ ط جم ا + ٢ لا
(٢٠٨) معلوم ہوگا کہ چرخیونکے ہر ایک نظام مین حالت سکون دریافت

کرنے کے لئے ہمنے علی الترتیب نظام کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک

چرخیوں کے کشش معلوم کی ہمنے سوای حد ۱۹۶ کے طاقت والے سرے سے

شروع کیاہے اور اس حد مستثنی مین بہی طاقت والے سرے سے شروع

کرسکتے تہے

سوالات باب ۱۴

(۱) ایک متحرک گہرنی مین اگر گہرنی کا وزن ۲ پونڈ ہو تو دریافت کرو کہ
کتنی طاقت ۸ پونڈ کے وزن کو اوٹہا سکیگے

(۲) ایک متحرک گہرنی پر اگر دو ڈورین ایکدوسرے کے عمود وار ہون تو کون
سے طاقت ۳ پونڈ کے وزن کو سہار سکیگے

(۳) ایک آدمی ایک پلے مین جو ایک متحرک گہرنی کے ساتہہ بندہا ہوا ہے کہڑا ہے
اور ایک ڈوری جسکا ایک سرا بندہا ہوا ہے ایک گہرنی پر
ایک مقیم گہرنی پرسے گذرتی ہے تو دریافت کرو کہ آدمی کس طاقت سے
ساتہہ متحرک سرے کو پکڑ رکہے تاکہ اپنا وزن سہار سکے جبکہ دورین متوازی ہین

(۴) اگر ایک چرخ اور محور پر کل کا فایدہ ۵ بنسبت ایک متحرک گہرنی کے چہہ گُنا
ہو تو چرخ اور محور کے نصف القطرون مین کیا نسبت ہونی چاہیئے مندرجہ ذیل دس
مثالین گہرنیوں کے پہلے نظام سے متعلق ہین دیکہو حد (۱۹۹)

(۵) اگر ن = ۶ د ط = ۲۸ پونڈ تو د دریافت کرو

(۶) اگر د = ۴ پونڈ اور ط ایک اونس تو ن دریافت کرو

(۷) اگر ن = ۳ تو ط پر ایک اونس اور و پر ۱۰ اونس زیادہ کرنے سے
کیا نتیجہ پیدا ہوگا

(۸) اگر ایک آدمی اپنے برابر ایک وزن سہارے اور گھرنیین تین ہون
تو اوس فرش پر جسپر وہ آدمی کھڑا ہوا ہے اوسکا کیا دباو ہوگا

(۹) اگر تین گھرنیین ہون اور ہر ایک کا وزن ایک پونڈ ہو تو کونسے طاقت ۲ پونڈ
کے وزنکو سہار سکیگے

(۱۰) اگر تین ہموزن گھرنیین ہون تو ہر ایک کا کیا وزن ہونا چاہیئے تاکہ ۶ پونڈ
کا ایک وزن جو نچلی گھرنے سے لٹکتا ہے ۷ پونڈ ۴ اونس کے طاقت سے سہارا
جاسکے

(۱۱) اگر ہر ایک گھرنے کا وزن ط ہو تو و اور ہر ایک دوڑی کے کشش دریافت
کرو

(۱۲) اگر تین گھرنیین ہر ایک وَ وزن کے ہون اور و = ط تو و دریافت کرو

(۱۳) اگر دو گھرنیین ہر ایک ۴ وَ وزن کے ہون اور طاقت برابر ہو ۳ وَ کے
تو ثابت کرو کہ اسس نظام پر کوئی وزن نہین سہارا جاسکتا

(۱۴) تین گھرنیون کے نظام مین اگر نچلے گھرنے سے ۵ پونڈ کا وزن لگا
ہوا ہو اور اوس سے اوپر لے سے ۴ پونڈ کا اور اوس سے اوپر کے
۳ پونڈ کا تو سکون کے لئے کیا طاقت چاہیئے

مندرجہ ذیل ۶ مثالین گھرنیون کے دوسری نظام سے متعلق ہین

(۱۵) نچلے قلابے پر دوڑ دن کے تعداد دریافت کرو تاکہ ۴ اونس کے

طاقت ۴ پونڈ کے وزنکو سہار سکے

(۱۶) نچلی قلابی پر گہرنیوں کی تعداد دریافت کر جبکہ ط = ۱۲ اسٹون اور و = ۱۸ ہنڈرویٹ

(۱۷) اگر نچلی قلابے پر ۵ ڈورئین ہون تو بڑے سے بڑا وزن کیا ہو گا جو ایک آدمی جسکا وزن ۹ اسٹون ہے حتی الامکان سہار سکیگا

(۱۸) اگر نچلی قلابی پر ۴ ڈورئین ہون تو ط کے ساتہہ ایک اونس او رو کے ساتہہ ۳ اونس زیادہ کرنے سے کیا نتیجہ واقع ہو گا

(۱۹) ایک آدمی اپنے وزن سے نصف وزنکو سہارتا ہے اگر نچلی قلابے پر ۷ ڈورئین ہون تو اوس فرش پر جسپر وہ کہڑا ہے اوسکا دباو کیا ہو گا

(۲۰) اگر نچلی قلابے پر تین گہرنئین ہون اور ڈوری اوپرلے قلابی سے باندہا جاوے اور نچلی قلابے کا وزن طاقت کا سہ چند ہو تو کیا وزن سہارا جاسکتا ہے

پندہرواں باب سطح مایل

(۲۰۹) جر ثقیل مین سطح مایل سے ایک مجسم سطح مایل مراد ہے جو افق کے ساتہہ میلان مین واقع ہو جب سطح مایل جر ثقیل مین استعمال کیجاتے ہے تو خطوط مستقیم جسمین طاقت اور وزن عمل کرتے ہین اوس سطح راس مین واقع فرض کیجاتے ہین جو سطح مفروضہ اور افق کے تقاطع پر عمود وار ہو۔ پس سطح [illegible] ایک مثلث قایمۃ الزاویہ اس ب سے تعبیر ہو سکتی ہے افقی ضلع اس کو قاعدہ کہتے ہین اور خط راس س ب کو ارتفاع کہتے ہین اور وتر اب کو طول



کہتے ہین زاویہ ب ا س میلان سطح افق سے ہوتا ہے سطح کو بالکل جامد فرض کیا ہے اور بالکل صفا جب تک کہ اسکے برعکس نہ کہا جاوے پس سطح مایل کسقدر دباوکے جو اوسپر سمت عمود مین عمل کرے سہارنے کے قابل تصور کیجاتی ہے

(۲۱۰) اگر ایک وزن سطح مایل مین کسی نقطہ ل پر رکہا جاوے اور ل م سمت طاقت مین کہینچا جاوے اور ل ن اوسے سطح کی عمود وار ہو اسطور پر کہ ایک خط راس کو م اور ن پر قطع کرین تو طاقت ط کو وزن سے وہ نسبت ہوگی جو ل م کو ہے م ن سے ۔ فرض کرو کہ ب ا س ایک سطح مایل ہے ۔ اور فرض کرو کہ ایک بہاری جسم و وزنکا اوس سطح پر نقطہ ل پر رکہا گیا ہے اور طاقت ط سے جو ل م کے سمت مین عمل کر رہی ہے حالت معادلت مین ہے فرض کرو کہ کوئی خط م ن سمت الراس مین کہینچا گیا ہے اور ل ن سطح مایل کی عمود دار واقع ہے

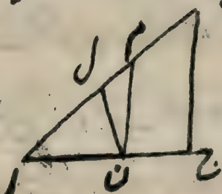
اوس جسم پر جو ل پر واقع ہے تین طاقتین عمل کر رہے ہین طاقت ط سمت ل م مین اور اوس جسم کا اپنا وزن اوس سمت مین جو کہ م ن کے متوازی ہے اور تحکیک سطح سے کے ن ل کے سمت مین حد ۳۶ کے بموجب کیونکہ معادلت ہے مثلث ل م ن کے اضلاع حد ۱ گانہ طاقتون کے متناسب ہونگے

∴ ط/و = ل م/م ن فرض کرو کہ تحکیک (ک) سے تعبیر کئے گئے ہے تب ک/و = ن ل/م ن ان نتایج کو ہم اسطرح لکہتے ہین

ط : و : ک :: ل م : م ن : ن ل اس حد کے دو خاص صورتین ہوسکتے ہین

ہین جو آیندہ عدد دہین مذکور ہین ۔

(۱۱۴) جب سطح مائل پہ حالت معادلت ہو اور طاقت سمت سطح مین عمل کرتے ہو تو طاقت کو وزن سے وہ نسبت ہوگی جو ارتفاع سطح کو ہے طول سے فرض کرو کہ (و) ایک بھاری جسم کے وزن کو تعبیر کرتا ہے اور ط طاقت کو کسی نقطہ ل سے جو کہ سطح مین ہے ل ن سطح کے عمود وار کھینچو جو قاعدہ کو نقطہ ن پہ قطع کرے اور ایک خط ن م ا لیسے کھینچو جو سطح کو م پہ قطع کرے تب اضلاع مثلث ل م ن کے ان طاقتون کے سمتون کے متوازی ہین جو جسم کو حالت معادلت مین رکھتی ہین



∴ بموجب حد (۳۶) کے

ط : و :: ل م : م ن ۔

لیکن مثلث ل م ن مثلث س ب ا کے مساوی الزوایا ہے کیونکہ زاویہ ل م ن برابر ہے زاویہ ا ب س کے اور زاویہ قائمہ ن ل م برابر ہے زاویہ قائمہ ا س ب کے اور اسلیئے تیسرا زاویہ م ن ل برابر ہے ب ا س کے پس (شکل ۴ م ۶) سے ہوگے بموجب $\frac{ل م}{م ن} = \frac{س ب}{ب ا}$ ∴ $\frac{ط}{و} = \frac{س ب}{ب ا}$

فرض کرو کہ ک تحلیک سطح کو تعبیر کرتا ہے تب $\frac{ک}{و} = \frac{ا س}{ا ب}$

ان نتایج کو ہم اسطرح لکھہ سکتے ہین

ط : و : ک :: س ب : ب ا : ا س ۔

(٢١٢) جب سطح مائل پر حالت معادلت ہوا اور طاقت خط افقی ہین عمل کرتی ہو تو طاقت کو وزن سے وہ نسبت ہوگی جو ارتفاع سطح کو ہر قاعدہ سے

فرض کرو (و) جسم کا وزن ہے اور ط طاقت ہر سطح مین کسی نقطہ ل سے خط ل ن سطح کے عمود وار کہینچو جو قاعدہ کو نقطہ ن پر قطع کرے اور ن م سمت راس ہین کہینچو جو ایک خط افقی کو جو نقطہ ل سے کہنچا جاوے نقطہ م پر ملے تب اضلاع مثلث ل م ن کے اون طاقتون کے سمتون کے متوازی ہین جو جسم کو حالت معادلت ہین رکہتی ہین ∴ بموجب ٣٦ خد کے $\frac{\text{ط}}{\text{و}} = \frac{\text{ل م}}{\text{م ن}}$

لیکن ل م ن مثلث اب س مثلث کے مساوی الزوایا ہے کیونکہ زاویہ قائمہ ب ل ن برابر ہے حاصلجمع دو زاویون ب اس اور اب س کا اور ب ل م برابر ہے ب اس کے بحکم (٩ ش م ١) ∴ م ل ن برابر ہے اب س کے اور زاویہ قائمہ ل م ن اور ب س ا باہم برابر ہین ∴ تیسرا زاویہ ل ن م برابر ہے تیسرے زاویہ ب اس کے اسلیئے بحکم (ش ٤ م ٦) $\frac{\text{ل م}}{\text{م ن}} = \frac{\text{ب س}}{\text{س ا}}$ ∴ $\frac{\text{ط}}{\text{و}} = \frac{\text{ب س}}{\text{س ا}}$ —

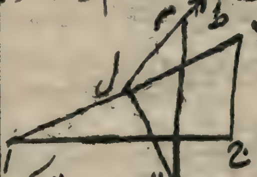
فرض کرو کہ (ک) تکلیک سطح ہے تو $\frac{\text{ک}}{\text{و}} = \frac{\text{اب}}{\text{س ا}}$ ہم ان نتایج کو اسطرح لکہہ سکتے ہین

ط : و :: ب س : س ا : اب -

(۲۱۳) ہم طاقتون ط و ک کے قیمتون کے لئے علم مثلث کی مدد سے جملی حاصل کر سکتے ہین

فرض کرو کہ زاویہ ب اس = ا اور م ل ب = ب اسلئے م ل ن = ۹۰ + ب ÷

اب ط : و : ک :: ل م : م ن : ن ل :: جیب ل ن م : جیب م ل ن : جیب ن م ل :: جیب ا : جیب (۹۰ + ب)



: جیب (۹۰ - ا - ب) :: جیب ا : جم ب : جم (ا + ب)

(۲۱۴) پچھلی حد کی شکل مین سطح کے تحکیک خط مستقیم ن ل سے تعبیر کی گئی ہے یعنے تحکیک ن سے ل کیطرف عمل کرتی ہے پس اگر جسم سطح کے اوپر رکھا جاوے اور حالت معادلت مین ہو تو خط مستقیم ل ن سطح کے نیچے کیطرف ہوگا یعنے حاصل جمع زوایا م ل ب اور ب اس کے ایک زاویہ قائمہ سے کم ہوگی

(۲۱۵) - حد ۲۱۳ کے نتیجے طاقتون کے منفصل کرنے سے بھی حد ۲۰۶ و ۲۰۷ کی مدد سے حاصل ہو سکتے ہین ÷

اور اسطرح نتائج مذکورہ خوب یاد رہ سکتے ہین ÷

طاقتون کو سطح کی سمت مین منفصل کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے ط جم ب = و جیب ا ÷

اور طاقتون کو سطح کے علی القوائم منفصل کرنے سے یہ حاصل ہوتا ہے ط جیب ب + ک = و جم ا ÷

اس سے ہم یہہ نتیجہ حاصل کر سکتے ہین ÷

$$ک = وجم ا - \frac{وجب ا جب ب}{جم ب} = \frac{وجم (ا + ب)}{جم ب}$$

اس عام اصول ہین خاص صورتین جو حدود (۲۱۱) و (۲۱۲) مین مذکور ہون شامل ہین ÷

جبکہ طاقت سطح کی سمت مین عمل کرتی ہو تو ب = ۰

تو پ = وجب ا اور ک = وجم ا ÷

جبکہ طاقت حالت افقی مین عمل کرتی ہو تو ب = - ا

تو پ = وس ا اور ک = وقع ب -

(۲۱۶) شاید خیال ہوگا کہ سطح مائل کوئی کل نہین ہے کیونکہ وہ اور کلونکے طرح مستعمل نہین ہو سکتی مگر واضح ہو کہ اگر کسی جسم کو اوپر چڑہانا ہو تو ہم اوپر سطح مائل پہ کہینچ سکتے ہین بوسیلہ ایک طاقت کے جو کہ وزن جسم سے کم ہوتی ہے

مثالات باب پانزدہم

مندرجہ ذیل بارہ مثالون مین طاقت سطح کی سمت مین عمل کرتی ہے

(۱) اگر سطح کا ارتفاع وزن کو تعبیر کرے تو دریافت کرو کہ سطح پہ دباؤ کو کون خط تعبیر کریگا -

(۲) اگر و = ۱۲ پونڈ اور ارتفاع سطح کو قاعدہ سے بہ نسبت ۳ کی ۴ سے ہو ط دریافت کرو -

(۳) اگر و = ۱۰ پونڈ اور ط = ۶ پونڈ ک دریافت کرو

(۴) اگر ط = ح تو سطح کا زاویہ اور ط کی نسبت و سے دریافت کرو

(۵) اگر ط کی نسبت ح کے ساتھہ ایسی ہو جیسے ۳ کو ۴ سے تو ان مین سے ہر ایک کی قیمت کی عبارتین معلوم کرو

(۶) اگر ط = ۹ پونڈ تو و دریافت کرو جبکہ ارتفاع سطح ۳ انچ ہے اور قاعدہ ۴ انچ -

(۷) اگر ایک سطح مائل کا طول ۸ فیٹ زیادہ کیا جاوے تو اسکا ارتفاع ۳ فیٹ ۶ انچ اونچا ہوتا ہے اگر و = ۲۰۰ تو ط دریافت کرو -

(۸) اگر ایک سطح مائل کا طول ۳۲ انچ ہو اور ارتفاع ۸ انچ تو کل کا فائدہ دریافت کرو

(۹) ایک سطح مائل اب ج جسکا طول اب ہے جبکہ قاعدہ اج پر رکھی جاتی ہی تو ۳ پونڈ کی طاقت اوسپر ۵ پونڈ کا وزن سنبھال سکتی ہے اگر سطح قاعدہ ب ج پر رکھی جاوے اور اج اوسکا ارتفاع ہو تو وہی طاقت کس وزن کو سنبھال سکی گی -

(۱۰) ایک ریل گاڑی جسکا وزن ۳۰ ٹن ہے ایک سطح مائل ایک فٹ کے اوپر ۲۶۰ مین بذریعہ ایک رسّی اور ایک کل ہفتیم کی کہنچی جاتی ہے تو دریافت کرو رسّی کم سے کم کتنے پونڈ کا وزن سنبھال سکیگی -

(۱۱) ایک وزن ۲۰ پونڈ کا بذریعہ ایک رسّی کے جو کہ سطح مائل کے کسی نقطہ کی ساتھہ بندہی ہوئی ہے سنبھار رہا ہے اور رسّی صرف ۱۰ پونڈ کے وزن کے سنبھالنے کے قابل ہے اگر سطح کا زاویہ میلان آہستہ آہستہ بڑہایا جاوے تو دریافت کرو کہ رسّی کب ٹوٹ جاوے گی +

(۱۲) ایک سطح مایل آب ج جب ضلع آج پر رکھی جاتی ہے تو کسی مفروضہ وزن کے سہارنے کے لئے جو طاقت درکار ہوتی ہے وہ دو چند ہے اوس طاقت سے جو درکار ہوگی جبکہ سطح ضلع ب ج پہ رکھی جاوے تو ثابت کرو کہ ایک پونڈ کی طاقت بڑی سے بڑا کتنا وزن سطح پہ سہار سکیگی۔

مندرجہ ذیل چار مثالوں مین طاقت سمت افقی مین عمل کرتی ہے

(۱۳) اگر و = ۱۲ پونڈ اور قاعدہ کی نسبت طول سے ایسی ہو جیسی ۱۲ کو ۱۵ سے تو ط دریافت کرو۔

(۱۴) اگر و = ۸۴ پونڈ اور قاعدہ کو ارتفاع سے ایسی نسبت ہو جیسے ۲۴ کو ۸ سے تو ط اور ک دریافت کرو۔

(۱۵) اگر ک = ۲ پونڈ اور ط = ایک پونڈ تو و اور سطح کا زاویہ میلان دریافت کرو

(۱۶) اگر و = ۱۲ پونڈ اور ط = ۹ پونڈ تو ک دریافت کرو۔

(۱۷) اگر ایک طاقت جو سمت سطح مین عمل کرکے ایک وزن مفروضہ کو سہار سکتی ہے اوس طاقت سے نصف ہو جو سمت افقی مین عمل کرکے وزن مذکور کو سہار سکتی ہے تو سطح کا زاویہ میل دریافت کرو۔

(۱۸) جب طاقت سمت افقی مین عمل کرتی ہو تو سطح پہ دباؤ ک ہوتا ہے اور جب طاقت سطح کے متوازی عمل کرتی ہو تو دباؤ س ہوتا ہے ثابت کرو کہ ک س = و۲۔

(۱۹) ایک طاقت ط سمت سطح مین عمل کرکے ایک وزن و کو سہار سکتی ہے اور سمت افقی مین عمل کرکے وزن لا کو سہار سکتی ہے تو

ثابت کرو کہ $ط^2 = و^2 - ق^2$۔

(۲۰) ایک وزن و ایک طاقت ط سے جو افقی سمت مین عمل کرتی ہو یا ایک طاقت ق سے جو سطح ب کے متوازی عمل کرتی ہو سہارا جاسکتا ہے تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{ق^2} = \frac{1}{ط^2} + \frac{1}{و^2}$۔

(۲۱) بذریعہ اقلیدس کی طاقت کے عمل کرنے کی سمت دریافت کرو جبکہ وہ وزن کے برابر ہو اور عین سمت راس مین اوپر کیطرف عمل نہ کرتی ہو اور ثابت کرو کہ اسحالت مین اگر سطح پر دباؤ ص ہو اور جب طاقت سطح کی سمت مین عمل کرے دباؤ ک ہو تو ص = ۲ک

(۲۲) ایک سطح مائل کا طول ۵ فٹ ہے اور ارتفاع تین فٹ ہے تو معلوم کرو کہ ایک وزن ۴۰ پونڈ کو کو نسے دو حصوں مین تقسیم کرنا چاہئے کہ ایک حصہ جو سطح کی چوٹی پر لٹکتا ہے دوسرے حصہ کو جو سطح پر ساکن ہے سہار سکے۔

(۲۳) ایک سطح کا زاویہ میلان ۳۰° ہے ایک ذرہ سطح کے نقطہ درمیانی پہ رکھا ہے اور بذریعہ ایک ڈوری کے جو سطح کے کناؤ مین سے گذر کر قاعدہ کے مقابل سرے سے بندھی ہوئی ہے ساکن ہے تو ثابت کرو کہ ڈوری کی کشش ذرہ کے وزن کے برابر ہوگی۔

(۲۴) ایک وزن ۲۰ پونڈ کا بذریعہ ایک ۱۲ پونڈ کے طاقت کے جو سطح کی سمت مین عمل کرتی ہے سہارا رہوا ہے تو ثابت کرو کہ اگر وزن مذکور بذریعہ ایک طاقت کے جو سمت افقی مین عمل کرتی ہو سہارا جاے

تو طاقت کو اتنا زیادہ کرنا پڑیگا جتنی کہ ۵ کو نسبت ہے ۴ سے اور سطح پر دباؤ اتنا زیادہ ہوگا جیسے کہ ۲۵ کو نسبت ہے ۱۶ سے *

باب شانزدہم فانہ اور پیچ

فانہ ایک مجسم جسم ہوتا ہے پر سمی شکل کا - فانہ مین دو متوازی طرفین برابر اور متشابہ مثلثین ہوتی ہین اور تین اور طرفین ہوتی ہین جو مستطیل ہوتی ہین -

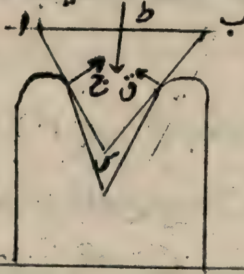
فانہ کا استعمال جسمونکو چیرنے یا علیحدہ کرنیکا ہوتا ہے -

فرض کرو کہ فانہ بوسیلہ ایک طاقت ط کے جو علی القوائم طرفون مین سے ایک پر عمل کرتی ہے . آگے کیطرف دھکیلا جاتا ہے اور دو تحکیکون ق اور ج سے جو ان اجسام سے پیدا ہوتے ہین جنکو جدا کرنے کے لیئے فانہ استعمال کیا جاتا ہے پیچھے کیطرف ہٹتا ہے ہم فرض کر سکتے ہین کہ یہہ طاقتین ایک سطح مین عمل کرتی ہین جو اطراف مستطیل پر عمود وار ہے ہم فرض کرینگے کہ فانہ اور اجسام صاف ہین پس کہ طاقتین ہر ایک طرف پر عمود وار عمل کرتی ہین -

فرض کرو کہ مثلث اب س فانہ کی اوس قطع کو ظاہر کرتی ہے جو ایک ایسی سطح سے بنتا ہے جو اوسکی اطراف مستطیل پر عمود وار واقع ہے فرض کرو کہ فانہ کو ط ق ج طاقتین حالت معادلت مین رکھتے ہین اور وہ طاقتین جدا گانہ اب ب س و س ا پر عمود وار واقع ہین تو بموجب ۲۷

ط : ق : ج : : اب : س ب : س ا +

اگر اِس برابر ب س کے ہو تو فانہ کو مساوی الساقین کہتے ہین اس حالت میں



ق = ج اور ط : ج :: اب : س ا -

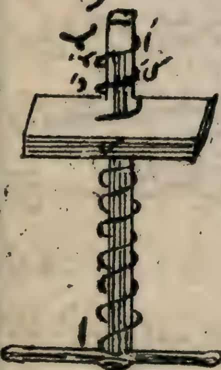
فرض کرو کہ ۲ ء زاویہ ا س ب کی

تعبیر کرتا ہے تو جبکہ فانہ مساوی الساقین ہے اب = ۲ ا س کی ز

ط : ج :: ۲ جیب ا : ا لیکن ط = ۲ ج جیب ا -

(۱۸ م) ثبوت مذکورہ بالا کچھہ چندان مفید نہین ہے کیونکہ جن حالتون کو دبا ن مان لیا ہے عمل مین بہت کم واقع ہوتی ہین بعض اوقات پیچ کو فانہ کی مثال دیتے ہین لیکن جب پیچ حالت معادلت مین ہو تو اوسکے اطراف کی تحلیل کا عمل رگڑ سے زائل ہوتا ہے نہ کہ اوس طاقت سے جو اوسکے سر پر عمل کرتی ہے گو پیچ جو اوسکے سر پر صدمے لگانی سی آگے دہکیلی جاتی ہے لیکن حرکت پیدا کرنے مین صدمے کے اثر کی بحث علم سکون سے کچھہ علاقہ نہین رکھتی -

(۱۹ م) پیچ ایک راست مدور استوانی اب کی شکل کا ہوتا ہے جس کے گرد ایک



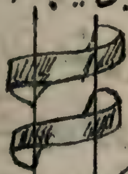
دہاگہ ا ب س د یکسان موٹایکا لپٹا ہوا ہوتا ہے پیچ کا دہاگہ جو استوانہ کے محور کے متوازی خطوط سے ایک معین زاویہ بناتا ہے یہہ استوانہ ایک لٹھہ مین ہین جسکا سوراخ اوتنا ہی ہوتا ہی ٹھیک آجاتا جسکے اندرونی سطح مین دہاگہ کیلیئے گٹا ہوتا ہے

پس جب لٹھہ قائم ہو اور استوانہ اوس مین لگایا جاوے تو استوانہ

کی حرکت کیصورت صرف اپنے محور کے گرد آگے پیچھے ہٹنے کے ہوسکتی ہے۔

(۴۴) عمل مین پیچ کے دھاگونکی شکلین مختلف ہوتی ہین جنکے دو مفصلہ ذیل مثالین ہین ٭

بائین طرف کی شکل قریبًا وہی ہے جو ابتدائی کتابون مین ثبوت کے واسطے دیجاتی ہے عمومًا دھاگہ کی مٹائی اور چوڑائی پر خیال نہین کیاجاتا ٭





ہم مندرجہ ذیل ہندسیہ طریقہ سے دھاگہ کی شکل سمجھ سکتے ہین

فرض کرو کہ آب ن م ایک مستطیل ہے ب ن مین ایک نقطہ س لو اور س د د ج ج ف وغیرہ سب ب س کے برابر بناؤ س، اور آ مین خط ملاؤ اور نقاط د ج ف وغیرہ مین سے خطوط ب ن کے متوازی



کھینچو جو ا م کو نقاط س' د' ج' وغیرہ پر تقاطع کرین تو اگر ہم آب ن م کو ایک استوانہ مستطیل شکل بنا ہوا خیال کرین تو خطوط آس فرض کرو س د ج اور ج ف وغیرہ ایک خط منحنی بنائینگے جس سے پیچ کی شکل معلوم ہوجائے گی ٭

فرض کرو کہ زاویہ ا س ب ا سے تعبیر ہوتا ہے تو س ب = آب س آ کے اگر نصف قطر استوانہ ر ہس کو تعبیر کرے اور π بطور معمول د ہ

نسبت ظاہر کرہی جو محیط دایرہ کو قطر سے ہوتی ہر تو اب = ٢ π ٧ یا یبں س
ب = ٢ π ٧ س آ درمیانی ہے جب اُس فاصلہ کو محور کے متوازی پایا
جاوی زاویہ آ کو پیچ کا زاویہ کہ سکتے ہین *

(٢٢١) فرض کرو کہ استوانہ کا محور سمت الراس مین ہر اور ایک وزن
و پیچ کے سری پر رکہا گیا ہر اسحالت مین پیچ نیچے اُترے گا جبتک
کہ اُسکو کوئی طاقت ط نہ روکے ہم فرض کرینگے کہ یہ طاقت ایک
افقی بازو کے انجام پر عمل کرتی ہر جو استوانہ سے لگا ہوا ہر اُس فاصلہ
کو جو استوانہ کے محور اور طاقت کے نقطہ عمل کے درمیان مین ہے
ہم بازو طاقت کہینگے *

(٢٢٢) جب پیچ حالت معادلت مین ہو طاقت کو وزن سے وہ
نسبت ہوتی ہر جو ذ متصل دھاگون کے فاصلہ کو اُس دایرہ کے محیط سے
ہوتی ہر جسکا بازوی طاقت نصف قطر ہو -

فرض کرو کہ ر استوانہ کا نصف قطر ہر ب بازوی طاقت کا طول ہر اور
ا پیچ کا زاویہ ہر پیچ پر وزن و طاقت ط اور ٹہ کی تحکیکین عمل کرتی ہین
یہ تحکیکین ٹہ کے مختلف نقاط پہ عمل کرتی ہین لیکن چونکہ دھاگہ صفا ہے
پس یہ سب دھاگہ کی عمودوار عمل کرتی ہین یعنی وی تمام خطوط راس کے
ساتھ زاویہ ا بناتی ہین ان تحکیکون کو آ س ل وغیرہ سے تعبیر کرو
ہر ایک تحکیک کو دو جزوون مین منفصل کرو ایک سمت الراس مین اور دوسرا خط افقی
ہین تو اجزای راسی = ہ جم آ س جم ا اؤر ل جم ا وغیرہ کے اور جزوی افقی

رجب اس جب آن آ وغیرہ کے ۔

انہین دلائل سے جو حد ود ۱۰۴ اور ۱۰۵ مین بیان ہوئین ہمین معلوم ہوتا ہے کہ دو شرائط کا پورا ہونا ضروری ہے جب کل حالت معدلت مین ہو یعنے وہ اجزا جو محور کے متوازی ہین آپس مین حالت معادلت مین ہونے چاہئین یعنی و = (ر + س + ل + ...) جم ا اور طاقتو نکے مقیاس القوۃ بہی محور کے گرد حالت معدلت مین ہونی چاہئین یعنے

طاب = (ر + س + ل ....) رجب ا

پس عمل تقسیم سے ط ب / و = رجب ا / جم ا اسلئے ط / و = رجب ا / ب جم ا = ۲۲۲ رمس ا / ب ۲۲۲ =

دو مستقل دباؤ کو نکا فاصلہ / محیط اوس دایرہ کا جسکا نصف قطر ب ہو ۔

(۲۲۳) پیچ کا عام فائدہ وزنکا سہارنا نہین ہے بلکہ دباؤ پیدا کرنا ۔ فرض کرو کہ ایک قائم پیچ اوس جسم کے اوپر لگی ہوئی ہے جسکو ہمنے (۱۹۱) حد کی شکل مین د سے تعبیر کیا ہے تو پیچ کو پہیرنے سے جسم پیچ کے سر اور رلہٹہ کے درمیان ب مجلد ہیگا بشکنجہ پیچ کے اس استعمال کی مثال ہے اسحالت مین بہی قاعدہ اس کل کا دہے رہے گا جو کہ حد (۲۲۲) مین بیان ہوا اسحالت مین و اوس دباؤ کو تعبیر کریگا جو کہ دبتا ہوا جسم پیچ کے محور کے متوازی پیدا کرتا ہے

مثالات باب شانزدہم

(۱) ایک خانہ قائمۃ الزاویہ اور مساوی الساقین ہے اور ایک پچاس پونڈ کی طاقت زاویہ قائمہ کے مقابل عمل کرتی ہے تو باقی دو طاقتین معلوم کرو ۔

(۲) ایک خانہ مثلث مساوی الاضلاع کی شکل کا ہے اور دو طاقتین ہر ایک ایک پونڈ کی ہین تو تیسری طاقت معلوم کرو ۔

(۳) ایک مساوی الساقین قائمہ کا زاویہ راس معلوم کرو جب اُس زاویہ کی مقابل کیطرف دباؤ دونوں تختیکو نکی نصف مجموعہ کے برابر ہو۔

(۴) اگر پیچ کے زاویہ کا مس $\frac{1}{4}$ ہو استوانہ کا نصف قطر ۴ انچ ہو اور طاقت بازوے کا طول ۲ فٹ ہو تو و کی نسبت پ سے دریافت کرو۔

(۵) طاکیمقام عمل کے دائرہ کا محیط ۶ فٹ ہے تو دریافت کرو کہ پیچ ایک استوانہ کیگرد جسکا طول ۲ فٹ ہے کتنی دفعہ پھرے تاکہ و برابر ہو ۴۸ ط کے۔

(۶) کسی پیچ کے دو متصلہ دنا گونکے درمیان فاصلہ $\frac{1}{4}$ انچ ہے اور بازوے طاقت کا طول ۵ فٹ ہے تو دریافت کرو کہ ایک پونڈ کے طاقت سے کتنا وزن سہارا جاسکیگا۔

(۷) ایک پیچ کا زاویہ ۵۰۰۳ ہے اور طاقت بازوے کا طول استوانہ کی نصف قطر کا ن گنا ہے تو کل کا فایدہ دریافت کرو

(۸) طاقت بازوی کا طول ۱۵ انچ ہے تو پیچ کے دو متصلہ دنا گونکا فاصلہ دریافت کرو بشرطیکہ فایدہ کل ۳۰ ہو۔

(۹) ایک پیچ کا سر ۱۲ انچ محیط مین ہے اور اوسکے بناوٹ اسطرح کے ہے کہ ہر ایک گردش کے ساتھ اوسکا سر $\frac{1}{2}$ انچ آگے جاتا ہے تو اوسکے سر کے محیط پر کیا طاقت لگانے چاہیئے تاکہ پیچ ۹۶ پونڈ کا دباؤ پیدا کرے

(۱۰) ایک پیچ ایک استوانہ مین جسکا طول ایک فٹ ہے م گردش کر سکتا ہے اور طاقت بازو کا طول ن فٹ تو کل کا فایدہ دریافت کرو

جوابات

باب اوّل

(۱) ۸ پونڈ (۲) ۳۲ انچ (۳) ت ط / ۱ پونڈ (۴) ق / ط ۱ انچ (۵) ۹ پونڈ اور ۳ پونڈ ایک انچ (۶) جیسے ۳ کو ۴ سے (۷) جیسے ۴ کو ۳ سے (۸) ۷ / ۲ مکعب فٹ (۹) جیسے ۱۶ کو ۹ سے (۱۰) جیسے م / ۱ کو ب ن

باب دوم

(۱) ۴ ۶۴ و ۸ (۲) ۳۷ (۳) ۹ و ۱۲ (۴) ۳ و ۶ (۵) ۵ × ۲ √۳ پونڈ — حاصل سے ۵۰ کی زاویہ پر (۸) جیسے √۳ کو نسبت ہے ۲ سے (۹) زاویہ قائمہ (۱۰) ۵ و ۵ × ۲ √۳ (۱۱) ایک خط مستقیم میں (۱۲) ۲۰ درجہ (۱۳) چھوٹی ڈوری کے کشش ۴ پونڈ ہے اور بڑے رسی کے ۳ پونڈ —

باب سیوم

(۲) حد (۳۴) سے ادا و اسکون مین ہوسکے اور دور ہوسکتے ہین پس حاصل ا اور ۲ پونڈ کے طاقتو نکا ہوگا جو ۲۰ درجہ پر عمل کرتے ہین — (۴) — دیکھو حد (۳۷)

(۵) ۱۵ پونڈ و ۲۰ پونڈ (۶) ۴ پونڈ (۷) فرض کرو کہ و ا و و ب مساوی طاقتونکو
تعبیر کرتے ہین اور و د اوسکے حاصل کو اوکو س تک خارج کرو تاکہ و س = ۲ و ا
اور فرض کرو کہ و ی و ب اور و س کا حاصل ہے اب یہہ فرض کیا گیا ہے
کہ و ی = و د = و ی اور و د کا حاصل دوچند و ب اور نصف و ج کی حاصل کے برابر
ہے پس و ی سکے برابر ہے (۸) نمبر ۷ سے معلوم ہوتا ہے کہ زاویہ ی و د = ۱۲۰
درجہ اور جو خط زاویہ ی و د کے تنصیف کرتا ہے و ب کے ساتھہ ایک ایسا زاویہ بناویگا
جو مساوی ہوگا ی و س کی = زاویہ ی و د = زاویہ ب و دی (۱۲) حاصل ۲ × ۲ یا ۴ پونڈ
ہے اور مربع کے ضلع کے متوازی ہے (۱۳) حاصل کی سمت او س خط سے منطبق
ہوگے جو نقطہ مفروضہ سے مستطیل کے وترونکی تقاطع تک کہینچا جاوے اوسکا مقدار
اس خط سے دوچند ہوگا (۱۴) طاقتونکا کثیر الاضلاع لگاؤ (۱۵) مثال ۴ استعمال
کرو اگر مساوی حصونکی تعداد ن ہو تو حاصل نصف قطر کا ن گنا ہوگا (۱۶) جو خط کہ مستقیم
حد ۸ ۵ کے شکل ۳۳ مین ا ف کو وصل کرتا ہے

باب چہارم

(۱) حاصل ۹ × $\frac{2}{3}$ پونڈ ہے اور وتر ا ج کے متوازی اور ا و کو اسسے $\frac{2}{9}$
ا د کی فاصلہ پر قطع کرتا ہے (۲) ۳۸ پونڈ اور ۱۴ پونڈ (۳) بڑے وزن سے
۱۶ انچ۔ (۸) ط ا = ق ب + (۹) ط ا × ۱۲ جہان ا مربع کا ضلع ہے

باب پنجم

(۷) د کے گرد مقیاس لو تو معلوم ہوگا کہ ک ی ب ج کے متوازی ہے (۸)
کسی ایک طاقت کی ایک سری پر مقیاس لو تو معلوم ہوگا کہ اوسکے نقطہ و پر تنصیف

ہو گی

باب ششم

(۱) ۲۰٫۳ پونڈ (۵) زاویہ اج ب معلوم ہے اور چونکہ ط ق ح معلوم ہین پس جو زاویئے کہ ج کے سمت اج اور ج ب سے بناتے ہین معلوم ہین (۶) دیکھو حد ۳۸ اور اقلیدس م ۳ ش ۲۱ و ۲۲ (۸) نقطہ اون خطوط کے تقاطع پر ہو گا جو اضلاع مقابل کے نقاط وسط کو وصل کرتے ہین (۹) طاقتین ۱ اور ۳ؒ علی القوایم ہین طاقتین ۲ اور ۱۲۰ درجہ کے زاویہ پر (۱۱) ج د ج ۱ اور ج ب کا حاصل فرضکرو اور فرضکرو کہ ۱ اُتک آجاتا ہے د دَ کو وا سکے مساوی اور متوازی لو تو ۱َ دَج ب کے متوازی اور مساوی ہوگا پس ج دَج ۱َ اور ج ب کا حاصل ہے

باب ہفتم

(۱) ۱۲ اپونڈ (۲) ۸ انچ (۳) خالص ایک انچ کے فاصلہ پر۔ (۴) ۲ پونڈ یا ۵ پونڈ (۶) ۴ پونڈ (۷)۔۳ کو ۴ سے (۸) ۹ کو ۷ سے (۹) $\frac{۲}{۳}$ ۲۶ ہنڈرڈ ویٹ (۱۳) ط + ح = ق + س اور ط = ق = ح = س (۱۴) دیکھو حد ۳۸ (۱۵) ثابت ہو سکتا ہے کہ سلاخ کا نقطہ جسپر دونون وزنونکا حاصل عمل کرتا ہے ج سے ۱۳ انچ ہے اب مثال ۱۴ استعمال کرو تو معلوم ہو گا کہ کششین ۱۵۰ پونڈ اور ۲۰ پونڈ ہین

باب ہشتم

(۲) ط و ق (۳) ایک بارہ پونڈ کے طاقت ۵ انچ کے فاصلہ پر اوس سرے سے جہاںکہ ۴ پونڈ کے طاقت عمل کرتے ہے (۴) مدس کے مرکز سے ضلع کی ایک پانچوین حصہ کے فاصلہ پر (۵) اوس نقطہ پر جہان کہ ۸ پونڈ کے طاقت عمل کرتی ہے

(۶) مرکز سے نصف قطر کے $\frac{۱}{ن-۱}$ فاصلہ پر (۷) سری سے $\frac{۱}{۹}$ ۶ انچ (۱۲) ب ج کے نقطہ وسط پر طاقت ق + ح - ط ہونے چاہیئے اور علی ہذا القیاس

باب نہم

(۲) سری سے ایک فٹ (۳) فرضکرو کہ خط ا ب ح کے متوازی ہے اور د ب ج کا نقطہ وسط ہے تو مرکز ثقل ا د پر بفاصلہ $\frac{۷}{۹}$ ا د ہے (۴) بڑے ڈھیری کے مرکز سے نصف القطر کی $\frac{۱}{۶}$ فاصلہ پر (۵) مساوی طاقتین (۹) نسبت $\frac{۱}{۲}$ یا ا ہونی چاہیئے (۱۳) مربع کے مرکز سے مربع کے وتر کے $\frac{۱}{۲۴}$ فاصلہ پر (۱۴) $\frac{ل}{ن}$ (۱۵) $\frac{۴}{۳}$ د ا و $\frac{۲}{۵}$ فٹ (۱۶) مثلث کی قاعدہ سے مثلث کے ارتفاع کی $\frac{۵}{۱۸}$ فاصلہ پر (۱۷) مثلث کے قاعدہ سے قاعدہ کی $\frac{۳}{۴\sqrt{۲}+۸}$ فاصلہ پر (۱۸) سلاخوں کو ایسا رکھو کہ نقاط مماس ہر ایک کے وسط سے $\frac{۲}{۵}$ فٹ کے فاصلہ پر ہوں نچلی سلاخ کے ایک پونڈ کیطرف اور اوپر لے سلاخ کے ۹ پونڈ کیطرف (۱۹) سری سے کل طول کے $\frac{۷}{۱۸}$ فاصلہ پر (۲۰) $\frac{۱}{۳}$ ۸ و $\frac{۱}{۳}$ ۳ پونڈ

باب دہم

(۱) مربع کا $\frac{۳}{۴}$ (۲) ایک خط قاعدہ کے متوازی (۳) گردی سطح کا مرکز (۶) ایک دوسری کا دوچند ہے (۱۰) ۱۲ انچ (۱۱) نقطہ کا فاصلہ ضلع کے ایک سرے سے دوسری سری کے نسبت دوچند ہونا چاہیئے

باب یازدہم

(۱) اکو ۳ سے (۲) سری سے ۵۲ انچ (۳) $\frac{۳}{۱۰}$ ا پونڈ و $\frac{۲}{۱۰}$ ۵ پونڈ (۴) ستر سے دو فٹ (۵) ۲ انچ (۶) ۹ پونڈ و ۶ پونڈ اور نسبت ۲ کے ۳ سے ہے (۷) ۳ پونڈ

(۸) ۵ پونڈ و ۷ پونڈ (۹) طاقتین ۳ پونڈ اور ۱۲ پونڈ ہین (۱۰) ۲$\frac{۱}{۲}$ ۲ ابوط
و ۲۲$\frac{۱}{۲}$ پونڈ (۱۱) ایک دوسرے سے دوچند (۱۲) ۲$\frac{۱}{۴}$ و ۴$\frac{۱}{۳}$ فٹ (۱۳)
$\frac{۵}{۹}$ پونڈ و ۴$\frac{۱}{۹}$ پونڈ (۱۴) ۴۴ اسٹون (۱۶) مجرار سے ۴۵ درجہ اور $\frac{۱۴}{۹}$ پونڈ
(۱۷) $\frac{۵}{۳}$ ط حامل سے ۱$\frac{۱}{۵}$ فٹ کے فاصلہ پر (۱۹) ۱ سے ایک انچ اور
۱۰ پونڈ (۲۰) حامل سے ۴ انچ (۲۲) ق = ۲ ط

باب دوازدہم

(۲) ۱۸$\frac{۲}{۷}$ اونس (۳) ۸۰ پونڈ (۴) اوسی ۳ شلنگ ۹ پنس کیواسطے ۵ ۱۱ اونس
ملیگا جو بحساب ۴ شلنگ فی پونڈ ہوا (۶) نقطہ تعلیق سے ۷ انچ (۹) نقطہ د جس سے
درجہ شروع مستولی ہون نقطہ تعلیق س کے قریب آجائیگا (۱۰) نقطہ د س سے
بعید ہوجائیگا (۱۱) ۲$\frac{۱}{۲}$ فٹ اوس سے جسپر کہ ۱۰ پونڈ لٹکتا ہے و ۲۰ پونڈ (۱۳)
س پر دباؤ سلاخ کے وزن کا نصف ہوگا د پر سلاخ کے وزن کا $\frac{۳}{۴}$ (۱۴) دوسری
سرسے ۲ فٹ (۱۵) ۲ پونڈ (۱۶) جیسے $\frac{ج}{۲}$ ب کو ہے $\frac{ج}{۲}$ - ۱ سی (۱۷) ۶ فٹ
اور ۱$\frac{۱}{۴}$ و اور $\frac{۲}{۳}$ و (۱۸) ۲۰ پونڈ (۲۰) دوسری سرسے ۸ انچ (۲۱) سکہ سے
سلاخ کے سرسے $\frac{۳}{۱۴}$ انچ کی فاصلہ پر (۲۳) ۲۰ پونڈ (۲۴) مجرار کے $\frac{۵}{۱۲}$ فاصلہ
پر اوس سرسے جہاکہ بڑے طاقت عمل کرتے ہے

باب سیزدہم

(۱) ۵۶ انچ (۲) ۶$\frac{۱}{۲}$ پونڈ (۳) چرخ کا نصف القطر محور کے نصف القطر کا
۱۰ گنا ہونا چاہیئے (۴) ۱۱۶ اونس (۵) ۶ پونڈ کا وزن کیبل کو $\frac{۳}{۸}$ پونڈ سہارنا
چاہیئے باقی $\frac{۵}{۸}$ ۵ پونڈ چرخپر ۱۵ پونڈ سے محور پر سہارا جائیگا نقاط معین پر دباؤ

$\frac{5}{8}$ ۲۰ پونڈ ہو گا (۶) ۱۵ ہنڈرویٹ (۷) ۱۸ انچ و ۲۴ انچ (۸) ۱۸ پونڈ (۹) رسی جو چرخ کے ساتھہ منڈھی ہے سمت راس مین لسکتی ہے وس اوسکے سمت محور کو مس کرتی ہے (۱۰) زیادہ ہو گے

باب چہاردہم

(۱) ۳ پونڈ (۲) ایک پونڈ (۳) ایک طاقت اوسکے وزنکے $\frac{1}{4}$ کے برابر (۴) جیسا ۱۲ کو ہے ایک سے (۵) ۱۶ ہنڈرویٹ (۶) ۶ و ۷ (۷) وزن طاقت پر غالب ہو گا (۸) $\frac{9}{8}$ اوسکے وزن کا اگر فرض کرین کہ وہ اوپر کیطرف کہینچتا ہے جیسا کہ حل ۱۹۶ مین مگر $\frac{1}{8}$ اوسکے وزن کا اگر ڈورے کی طاقت کا سرا ایک مقیم چرخی پر سے گذرتا ہو پس کہ وہ نیچی کیطرف کہینچے (۹) ۳ پونڈ (۱۰) ایک پونڈ (۱۱) د = ط (۱۲) و = وَ (۱۴) $\frac{1}{8}$ ۳ پونڈ (۱۵) ۱۶ (۱۶) ۹ (۱۷) طاقت وزن پر غالب آئیگی (۱۸) $\frac{1}{2}$ ۷ ہنڈرویٹ (۱۹) $\frac{13}{14}$ اپنے وزن کا (۲۰) طاقت کا تین گنا

باب پانزدہم

(۱) زاویہ قایمہ تین طول پر عمود (۲) $\frac{1}{5}$ ۷ پونڈ (۳) ۸ پونڈ (۴) ۴۵ درجہ جیسی ایک کو ہے $\sqrt{3}$ سے (۵) ط = $\frac{3}{5}$ و اور ک = $\frac{4}{5}$ و (۶) ۱۵ پونڈ (۷) ۲۸ پونڈ (۸) ۴ (۹) $\frac{3}{4}$ ۳ پونڈ (۱۰) ۱۱۲۰ (۱۱) ۳۰ درجہ کے میلان پر (۱۲) $\frac{\text{۵}}{\text{۳}}$ پونڈ (۱۳) ۹ پونڈ (۱۴) ۱۴ پونڈ و ۵۰۰ پونڈ (۱۵) $\sqrt{3}$ ۲ پونڈ و ۳۰ درجہ (۱۶) ۱۵ پونڈ (۱۷) ۶۰ درجہ (۲۲) ۳۹ پونڈ جو لسکتا ہو

باب شانزدہم

(۱) ۴۵ $\sqrt{3}$ پونڈ (۲) ۴ پونڈ (۳) ۶۰ درجہ (۴) جیسی ۴ کو ہے ایک سے

(۵) ۸۴ (۶) ۸۰۴ پونڈ (۷) ن ماشہ (۸) دو انچ (۹) ۲ پونڈ (۱۰) ۲۱۲

فقط

تتمۂ الجبر

مطبوعہ انجمن پنجاب لاہور سنہ ۱۸۸۰ء

PREFACE.

THIS work is intended to supply a want that has long been very seriously felt by the Vernacular students preparing themselves for the Arts Examinations of the Panjab University College, who had no means of competing in this subject on equal terms with the English candidates.

Great difficulty has been experienced during the course of this book in having the Mathematical terminology and figures written out by the copyist and printed correctly; and notwithstanding the great pains that have been taken to render the book accurate, it perhaps still contains many misprints which will, it is hoped, be removed from the next edition, should one be called for.

The valuable assistance rendered by S. Dilawar Ali Shah and M. Miran Baksh of the Oriental College in the preparation of this book has to be thankfully acknowledged.

LAHORE, *January* 1880.



QA
821
T639
1879

TODHUNTER'S

"STATICS FOR BEGINNERS"

IN URDU,

CONSISTING OF SIXTEEN CHAPTERS

WITH EXAMPLES

AS REQUIRED FOR THE PROFICIENCY IN ARTS EXAMINATION

OF THE

PANJAB UNIVERSITY COLLEGE.

BY

LALA AYA RAM, B. A.,

McLEOD PANJAB ARABIC FELLOW

AND

ASSISTANT PROFESSOR OF MATHEMATICS,

AT THE

ORIENTAL COLLEGE, LAHORE,

UNDER THE DIRECTION OF

DR. G. W. LEITNER, M. A., BAR.-AT-LAW,

REGISTRAR, PANJAB UNIVERSITY COLLEGE.

Lahore:

PRINTED AT THE ALBERT PRESS.

1880.


UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01182144 4